序信息系统的知识粗糙熵与粗集粗糙熵

张晓燕[1],徐伟华[2]
ZHANG Xiao-yan[1],XU Wei-hua[2]

1.广东海洋大学 理学院 数学与信息科学系,广东 湛江 524088
2.西安交通大学 理学院 信息与系统科学研究所,西安 710049
1.Department of Mathematics and Information Sciences,Guangdong Ocean University,Zhanjiang,Guangdong 524088,China
2.Institute of Information and System Sciences,Xi'an Jiaotong University,Xi'an 710049,China
E-mail:datongzhangxiaoyan@126.com

ZHANG Xiao-yan,XU Wei-hua.Entropy of knowledge and rough set in ordered information systems.Computer Engineering and Applications,2007,43(27):62-65.

Abstract: In this paper,we address uncertainty measures of roughness of knowledge and rough sets by introducing rough entropy in ordered information systems.We prove that the rough entropy of knowledge and rough set decreases monotonously as the granularity of information becomes finer,and obtain some conclusions,which is every helpful in future research works of ordered information systems.

Key words: rough set;ordered information systems;knowledge rough entropy;rough degree

摘 要:在序信息系统中引入了知识粗糙熵和粗集粗糙熵的概念,得到了它们的有关性质,并证明了二者都随着知识确定程度的增强而单调下降的结论,从而给出了序信息系统的信息解释。进一步通过讨论它们之间的联系说明了粗集的粗糙熵可以更精确地度量粗集地粗糙程度。这些结论为序信息系统的知识发现奠定了一定的理论基础。

关键词:粗糙集;序信息系统;知识粗糙熵;粗糙度
文章编号:1002-8331(2007)27-0062-04 **文献标识码**:A **中图分类号**:TP18

1 引言

粗糙集理论[1]是近年来发展起来的一种处理不精确性、不确定性和模糊知识的软计算工具,它已被成功地应用于人工智能、数据挖掘、模式识别与智能信息处理等领域,并越来越引起国际学术界的关注。经典粗糙集是以完备信息系统为研究对象,以等价关系(满足自反性、对称性、传递性)为基础,通过等价关系对论域分成互不相交的等价类,划分越细,知识越丰富,信息越充分。

然而,在实际问题中有许多信息系统由于各种原因(如噪声、信息缺损等)并不是基于等价关系的,这就极大地限制了粗糙集理论的研究与应用。于是人们将等价关系放宽为相容关系、相似关系等等。特别地,Greco,Matarazzo 和 Slowinski 于1998 年提出了基于优势关系的粗糙集研究方法(DRSA),其主要是利用优势关系代替经典粗糙集中的等价关系建立序信息系统来考虑现实中存在的对属性值排序的问题[2-4]。而且,近年来这一研究也取得了可人的成果[5-9]。

另外,Shannon 早在 1948 年信息论中就提出了熵的概念,它是一个衡量系统结构不确定性的度量。许多学者发现熵的概念可以很好地应用到粗糙集的理论中,以反映知识的不确定性。其中,苗夺谦等人[10,11]讨论了知识粗糙性与信息熵之间的关系,证明了熵与互信息对于由知识粗糙性定义的偏序“较细”均是单调下降的,并证明了在无决策信息系统中,知识约简在信息和代数两种不同表示下是等价的,从而从信息论的角度刻画了粗糙集理论的本质。王国胤等人[12]通过比较粗糙集理论的代数观点和信息论观点,得到在协调决策表中两种观点下的知识约简是等价的。而且梁吉业等人[13]讨论了不完备信息系统中的知识熵和粗集粗糙熵的关系,给出了不完备信息系统的知识不确定性度量。然而,这些研究都是在经典的等价关系的前提下完成的,有许多实际问题却是基于优势关系的,即系统本身是序信息系统。因而,非常有必要去研究序信息系统中知识熵与粗集粗糙熵的有关性质,以描述序信息系统中知识的不确定性。

为此,本文在序信息系统中通过引入熵的概念,给出了序信息系统的知识熵有关性质,并证明了知识的粗糙熵随着知识确定程度的增强而单调下降的结论,从而给出了序信息系统的信息解释。进一步结合知识的粗糙熵与粗集的粗糙度给出了粗集粗糙熵的概念,证明了粗集粗糙熵也是随着知识确定程度的增强而单调下降的结论,进而说明了粗糙集的粗糙熵比粗糙度可以更精确地度量粗集的粗糙程度。这些结论为序信息系统的

作者简介:张晓燕(1979-),女,助教,主要研究领域为粗糙集理论,动力系统理论;徐伟华(1979-),男,博士研究生,主要研究领域为人工智能的数学理论基础。

知识发现和知识获取奠定了一定的理论基础。

2 粗糙集与序信息系统

信息系统有时也叫数据表或知识表示系统等,其主要是通过一张表来反映对象与属性之间的关系。下面先给出有关基本概念。

定义 1[7] 称一个三元组 $I=(U,A,F)$ 为一个信息系统,其中:

U 是有限对象集,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$;

A 是有限属性集,$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$;

F 是 U 与 A 的关系集,$F=\{f_k:U\to V_k,k\leqslant p\}$,$V_k$ 是 a_k 的有限值域。

在 Pawlak 近似空间意义下的信息系统,对每个属性集就决定了一个二元不可区分关系,即等价关系。然而,在实际生活中有许多系统并不是基于等价关系的,有不少是基于优势关系的,即对每个属性值域有按照递增或者递减的一个偏序关系,如一个班级的各科成绩情况等问题。这时就需要建立基于优势关系下的信息系统,即序信息系统。

定义 2[7] 在一个信息系统中,如果在某个属性值域上建立了偏序关系,称这个属性为一个准则。当所有的属性都为准则时,该信息系统称为序信息系统。

设在信息系统 (U,A,F) 中属性 a 是一个准则,并且在 a 的值域上建立的偏序关系是"$\geqslant_a$"。于是对于对象 x、y,我们说 $x\geqslant_a y$ 表示 x 至少和 y 关于准则 a 是一样好的,或者说 x 优于 y。

不失一般性,取属性的值域为实数,即 $V_k\subseteq R$(R 表示实数集)。

定义 $x\geqslant_a y$ 为:$x\geqslant_a y\Leftrightarrow f(x,a)\geqslant f(y,a)$。

于是,对于属性集 $B\subseteq A$,$x\geqslant_B y$ 是指 x 关于属性集 B 中的所有准则都优于 y。

一般,序信息系统本文用 $I^{\succ}=(U,A,F)$ 来表示。

定义 3[7] 设 $I^{\succ}=(U,A,F)$ 为一序信息系统,对于 $B\subseteq A$,令

$$R_B^{\geqslant}=\{(x,y)\in U\times U:f_l(x)\geqslant f_l(y),\ \forall a_l\in B\}$$

则 $R_B^{\geqslant}$ 称为序信息系统 $I^{\succ}=(U,A,F)$ 的优势关系。

若记:

$$[x_i]_B^{\geqslant}=\{x_j\in U|(x_j,x_i)\in R_B^{\geqslant}\}=\{x_j\in U|f_l(x_j)\geqslant f_l(x_i),\ \forall a_l\in B\}$$

$$U/R_B^{\geqslant}=\{[x_i]_B^{\geqslant}|x_i\in U\}$$

则称 $[x_i]_B^{\geqslant}$ 为对象 x_i 的优势类,$U/R_B^{\geqslant}$ 为该序信息系统对象集关于属性集 B 的一个分类。

易见,优势关系有下面性质:

命题 1[7] 设 $I^{\succ}=(U,A,F)$ 为序信息系统,则下面命题成立。

(1)$R_B^{\geqslant}$ 是自反的和传递的,未必是对称的,因而一般不再是等价关系。

(2)当 $B\subseteq A$ 时有 $R_A^{\geqslant}\subseteq R_B^{\geqslant}$。

(3)当 $B\subseteq A$ 时有 $[x_i]_A^{\geqslant}\subseteq[x_i]_B^{\geqslant}$。

(4)当 $x_j\in[x_i]_A^{\geqslant}$ 时有 $[x_j]_B^{\geqslant}\subseteq[x_i]_A^{\geqslant}$。

(5)$|[x_j]_A^{\geqslant}|\subseteq|[x_i]_A^{\geqslant}|$ 当且仅当 $f(x_i,a)=f(x_j,a)(\forall a\in A)$。

(6)对于任意的 $x_i\in U$,有 $|[x_i]_A^{\geqslant}|\geqslant 1$。

(7)$U/R_A^{\geqslant}$ 形成了 U 的一个覆盖,即:对于任意的 $x\in U$,有 $[x_i]_A^{\geqslant}\neq\emptyset$ 且 $\bigcup_{x\in U}[x]_A^{\geqslant}=U$。其中 $|\cdot|$ 表示集合的势。

为了更好地反映序信息系统中知识的关系,给出下面定义。

定义 4 设 $I^{\succ}=(U,A,F)$ 为一序信息系统,且 $B,C\subseteq A$。

(1)如果对于任意的 $x\in U$ 有 $[x]_B^{\geqslant}=[x]_C^{\geqslant}$,则称分类 $U/R_B^{\geqslant}$ 等于分类 $U/R_C^{\geqslant}$,并记作:$U/R_B^{\geqslant}=U/R_C^{\geqslant}$。

(2)如果对于任意的 $x\in U$ 有 $[x]_B^{\geqslant}\subseteq[x]_C^{\geqslant}$,则称分类 $U/R_B^{\geqslant}$ 细于分类 $U/R_C^{\geqslant}$,并记作:$U/R_B^{\geqslant}\subseteq U/R_C^{\geqslant}$。

(3)如果对于任意的 $x\in U$ 有 $[x]_B^{\geqslant}\subseteq[x]_C^{\geqslant}$,且对于某些 $y\in U$ 有 $[y]_B^{\geqslant}\neq[y]_C^{\geqslant}$,则称分类 $U/R_B^{\geqslant}$ 分类真细于 $U/R_C^{\geqslant}$,并记作:$U/R_B^{\geqslant}\subset U/R_C^{\geqslant}$。

显然由命题 1 和上面的定义,对于序信息系统 $I^{\succ}=(U,A,F)$ 以及 $B\subseteq A$,可以立即得到 $U/R_A^{\geqslant}\subseteq U/R_B^{\geqslant}$。

与经典粗糙集类似,序信息系统也可以定义上下近似这一对算子。

对于任意 $X\subseteq U$,定义 X 关于优势关系下 $R_B^{\geqslant}$ 的下近似和上近似分别为:

$$\underline{R_B^{\geqslant}}(X)=\{x_i\in U:[x_i]_B^{\geqslant}\subseteq X\}$$

$$\overline{R_B^{\geqslant}}(X)=\{x_i\in U:[x_i]_B^{\geqslant}\cap X\neq\emptyset\}$$

优势关系下的上、下近似也满足类似于 Pawlak 近似空间中的许多性质,详细请参考文献[7]。

例 1[7] 表 1 给出了一个序信息系统。

表 1　序信息系统 $I^{\succ}=(U,A,F)$

$U\times A$	a_1	a_2	a_3
x_1	1	2	1
x_2	3	2	2
x_3	1	1	2
x_4	2	1	3
x_5	3	3	2
x_6	3	2	3

于是,由优势关系的定义有:

$[x_1]_A^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$　　$[x_2]_A^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6\}$

$[x_3]_A^{\geqslant}=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$　　$[x_4]_A^{\geqslant}=\{x_4,x_6\}$

$[x_5]_A^{\geqslant}=\{x_5\}$　　$[x_6]_A^{\geqslant}=\{x_6\}$

进而,若记:$B=\{a_1,a_2\}$,有

$[x_1]_B^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$　　$[x_2]_B^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6\}$

$[x_3]_B^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$　　$[x_4]_B^{\geqslant}=\{x_2,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_5]_B^{\geqslant}=\{x_5\}$　　$[x_6]_B^{\geqslant}=\{x_5,x_6\}$

显然,由以上可知 $U/R_A^{\geqslant}\subseteq U/R_B^{\geqslant}$,即分类 $U/R_A^{\geqslant}$ 要细于分类 $U/R_B^{\geqslant}$。

为了叙述方便,下文在没有特别说明时信息系统都是指基于优势关系下的信息系统。

3 序信息系统中知识的粗糙熵

在这一部分，在序信息系统中引入知识粗糙熵的概念，并建立了知识粗糙熵和知识粗糙性的关系。

首先，给出序信息系统中知识粗糙熵的定义。

定义 5 设 $I^{\succeq}=(U,A,F)$为一序信息系统，且 $B\subseteq A$，则知识 B 的粗糙熵定义为：

$$E(B)=\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|[x_i]_B^{\geqslant}|}{|U|}\cdot \mathrm{lb}|[x_i]_B^{\geqslant}|$$

其中$|\cdot|$为集合的势。

例 2 由于上面定义，可以计算例 1 的序信息系统中知识 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$的粗糙熵为：

$$E(A)=\frac{4}{6}\cdot\mathrm{lb}4+\frac{3}{6}\cdot\mathrm{lb}3+\frac{5}{6}\cdot\mathrm{lb}5+\frac{2}{6}\cdot\mathrm{lb}2+\frac{1}{6}\cdot\mathrm{lb}1+\frac{1}{6}\cdot\mathrm{lb}1=$$
$$\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{lb}3+\frac{5}{6}\cdot\mathrm{lb}5+\frac{1}{3}=4.390\ 49$$

由定义 5 容易看出：

命题 2 设 $I^{\succeq}=(U,A,F)$为一序信息系统，且 $B\subseteq A$，则下面命题成立。

(1)$E(B)$取最大值$|U|\cdot\mathrm{lb}|U|$当且仅当 $U/R_B^{\geqslant}=U$。

(2)$E(B)$取最小值 0 当且仅当 $U/R_B^{\geqslant}=\{\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_{|U|}\}\}$。

由上面的关于知识的粗糙熵的性质可以知道在知识 B 下不能区分论域中任意两个对象，那么知识 B 的粗糙性最大，如果在知识 B 下能够区分论域中任意的对象，那么知识 B 达到了最精确程度，这与直观解释是完全一致的。

定理 1 设 $I^{\succeq}=(U,A,F)$为一序信息系统，且 $B_1,B_2\subseteq A$。若 $U/R_{B_1}^{\geqslant}\subset U/R_{B_2}^{\geqslant}$，则有 $E(B_1)<E(B_2)$。

证明 由于 $U/R_{B_1}^{\geqslant}\subset U/R_{B_2}^{\geqslant}$，则对于任意的 $x_i\in U$ 有：$[x_i]_{B_1}^{\geqslant}\subseteq[x_i]_{B_2}^{\geqslant}$。于是存在某个 $x_j\in U$ 满足$|[x_j]_{B_1}^{\geqslant}|<|[x_j]_{B_2}^{\geqslant}|$。因此由命题 1 和定义 5 可得：

$$\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|[x_i]_{B_1}^{\geqslant}|}{|U|}\cdot\mathrm{lb}|[x_i]_{B_1}^{\geqslant}|<\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|[x_i]_{B_2}^{\geqslant}|}{|U|}\cdot\mathrm{lb}|[x_i]_{B_2}^{\geqslant}|$$

即：$E(B_1)<E(B_2)$。

推论 1 设 $I^{\succeq}=(U,A,F)$为一序信息系统，且 $B_1,B_2\subseteq A$。若 $B_2\subseteq B_1$，则有 $E(B_1)<E(B_2)$。

由上面定理知序信息系统中知识的粗糙熵随着分辨能力的增强单调减少。

定理 2 设 $I^{\succeq}=(U,A,F)$为一序信息系统，且 $B_1,B_2\subseteq A$。若 $U/R_{B_1}^{\geqslant}=U/R_{B_2}^{\geqslant}$，则有 $E(B_1)=E(B_2)$。

证明 由于 $U/R_{B_1}^{\geqslant}=U/R_{B_2}^{\geqslant}$，则对于任意的 $x_i\in U$ 有：$[x_i]_{B_1}^{\geqslant}=[x_i]_{B_2}^{\geqslant}$。因此由定义 5 立即可以得到 $E(B_1)=E(B_2)$。

定理 3 设 $I^{\succeq}=(U,A,F)$为一序信息系统，且 $B_1,B_2\subseteq A$。若 $U/R_{B_1}^{\geqslant}\subseteq U/R_{B_2}^{\geqslant}$，且 $E(B_1)=E(B_2)$，则有 $U/R_{B_1}^{\geqslant}=U/R_{B_2}^{\geqslant}$。

证明 由于 $E(B_1)=E(B_2)$，于是对于任意的 $x_i\in U$ 有：

$$\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|[x_i]_{B_1}^{\geqslant}|}{|U|}\cdot\mathrm{lb}|[x_i]_{B_1}^{\geqslant}|=\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|[x_i]_{B_2}^{\geqslant}|}{|U|}\cdot\mathrm{lb}|[x_i]_{B_2}^{\geqslant}| \quad (1)$$

又 $U/R_{B_1}^{\geqslant}\subseteq U/R_{B_2}^{\geqslant}$，故可得：$[x_i]_{B_1}^{\geqslant}\subseteq[x_i]_{B_2}^{\geqslant}$，便有 $1\leqslant|[x_j]_{B_1}^{\geqslant}|\leqslant|[x_j]_{B_2}^{\geqslant}|$。因此有：

$$|[x_i]_{B_1}^{\geqslant}|\cdot\mathrm{lb}|[x_i]_{B_1}^{\geqslant}|\leqslant|[x_i]_{B_2}^{\geqslant}|\cdot\mathrm{lb}|[x_i]_{B_2}^{\geqslant}|$$

再结合式(1)可得：$|[x_i]_{B_1}^{\geqslant}|\cdot\mathrm{lb}|[x_i]_{B_1}^{\geqslant}|=|[x_i]_{B_2}^{\geqslant}|\cdot\mathrm{lb}|[x_i]_{B_2}^{\geqslant}|$。故有：$|[x_i]_{B_1}^{\geqslant}|=|[x_i]_{B_2}^{\geqslant}|$。

另外已经得到$[x_i]_{B_1}^{\geqslant}\subseteq[x_i]_{B_2}^{\geqslant}$，于是有$[x_i]_{B_1}^{\geqslant}=[x_i]_{B_2}^{\geqslant}$。

因此可得：$U/R_{B_1}^{\geqslant}=U/R_{B_2}^{\geqslant}$。

推论 2 设 $I^{\succeq}=(U,A,F)$为一序信息系统，且 $B_1,B_2\subseteq A$。若 $B_2\subseteq B_1$，且 $E(B_1)=E(B_2)$，则有 $U/R_{B_1}^{\geqslant}=U/R_{B_2}^{\geqslant}$。

由以上定理 3 可知如果两个知识表示之间存在包含关系，而它们的知识粗糙熵又相同，那么这两个知识表示是一样的，即两个分类是完全相同的。

例 3 在例 1 中记 $B=\{a_1,a_2\}$，而且已经得到了 $U/R_A^{\geqslant}\subseteq U/R_B^{\geqslant}$。例 2 中计算了知识 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$的粗糙熵为：$E(A)=4.390\ 49$。现在计算知识 B 的粗糙熵：

$$E(B)=\frac{4}{6}\cdot\mathrm{lb}4+\frac{3}{6}\cdot\mathrm{lb}3+\frac{6}{6}\cdot\mathrm{lb}6+\frac{4}{6}\cdot\mathrm{lb}4+\frac{1}{6}\cdot\mathrm{lb}1+\frac{2}{6}\cdot\mathrm{lb}2=$$
$$\frac{2}{3}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{lb}3+\mathrm{lb}6+\frac{1}{3}=6.377\ 44$$

显然：$E(A)\leqslant E(B)$。

然而，如果记 $B'=\{a_1\}$和 $B''=\{a_2\}$，有：

$[x_1]_{B'}^{\geqslant}=[x_3]_{B'}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_2]_{B'}^{\geqslant}=[x_5]_{B'}^{\geqslant}=[x_6]_{B'}^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6\}$

$[x_4]_{B'}^{\geqslant}=\{x_2,x_4,x_5,x_6\}$

及

$[x_1]_{B''}^{\geqslant}=[x_2]_{B''}^{\geqslant}=[x_6]_{B''}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$

$[x_3]_{B''}^{\geqslant}=[x_4]_{B''}^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_5]_{B''}^{\geqslant}=\{x_6\}$

进而可以计算：$E(B')=8.880\ 71$ 和 $E(B'')=9.169\ 93$。可以发现 $E(B')<E(B'')$，但是 $U/R_{B'}^{\geqslant}\subseteq U/R_{B''}^{\geqslant}$显然不成立。因此定理 1 的逆命题不成立。

4 序信息系统中粗集的粗糙熵

在经典粗糙集理论中，粗糙集是用粗糙度来度量的。由此也可以在序信息系统中引入粗糙度的概念来度量粗糙集。

定义 6 设 $I^{\succeq}=(U,A,F)$为一序信息系统，且 $B\subseteq A$，则粗糙集 $X\subseteq U$ 关于知识 B 的粗糙度定义为：

$$\rho_B(X)=1-\frac{|\underline{R_B^{\geqslant}}(X)|}{|\overline{R_B^{\geqslant}}(X)|}$$

其中$|\cdot|$表示集合的势。

由定义 6 可以看出粗糙集的粗糙度是在 0 与 1 之间的，而且容易得到下面性质。

定理 4 设 $I^{\succeq}=(U,A,F)$为一序信息系统，且 $B_1,B_2\subseteq A$。若 $U/R_{B_1}^{\geqslant}\subseteq U/R_{B_2}^{\geqslant}$，则对任意的 $X\subseteq U$ 有 $\rho_{B_1}(X)\leqslant\rho_{B_2}(X)$。

例 4 考虑例 1 的序信息系统中粗糙集 $X=\{x_4,x_5,x_6\}$分别关于知识 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$和 $B=\{a_1,a_2\}$的粗糙度。由于：

$\underline{R_A^{\geqslant}}(X)=\{x_4,x_5,x_6\}$，$\overline{R_A^{\geqslant}}(X)=U$；

$\underline{R_B^{\geqslant}}(X)=\{x_5,x_6\}$，$\overline{R_B^{\geqslant}}(X)=U$；

于是可得：$\rho_A(X)=\frac{1}{2}$ 以及 $\rho_B(X)=\frac{2}{3}$。

显然：$\rho_A(X)\leqslant\rho_B(X)$。

由以上定理4和例4可以发现粗糙集的粗糙度随着知识分类的变细而不会增大。然而可以通过下面的例5发现仅仅由粗糙度来衡量粗糙集的粗糙程度还是不够的。

例5 在例4中令 $X'=\{x_3,x_5,x_6\}$，再分别计算关于知识 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $B=\{a_1,a_2\}$ 的粗糙度。这时：

$\underline{R_A^{\geqslant}}(X')=\underline{R_B^{\geqslant}}(X')=\{x_5,x_6\}$

$\underline{R_A^{\geqslant}}(X')=\underline{R_B^{\geqslant}}(X')=U$

故：$\rho_A(X)=\rho_B(X)=\frac{1}{3}$。

例5告诉我们虽然知识 B 没有知识 A 细，但粗糙集 X' 关于知识 A 和知识 B 的粗糙度却是一样的。因此，非常有必要去寻找另外一种更加精确的粗糙集不确定性度量。为此，在序信息系统中引入粗集粗糙熵的概念。

定义7 设 $I^{\succ}=(U,A,F)$ 为一序信息系统，且 $B\subseteq A$，则粗糙集 $X\subseteq U$ 关于知识 B 的粗糙熵定义为：

$E_B(X)=\rho_B(X)E(B)$

由定义7可以看出粗糙集的粗糙熵不只和粗糙度有关，而且还和本身的序信息系统有关系。

例6 例5中 $X'=\{x_3,x_5,x_6\}$ 关于知识 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $B=\{a_1,a_2\}$ 的粗糙熵分别为：

$$E_B(X')=\rho_B(X')E(B)=\frac{1}{3}\times 6.377\,44=2.125\,79$$

$$E_A(X')=\rho_A(X')E(B)=\frac{1}{3}\times 4.394\,09=1.464\,68$$

于是有：$E_A(X')<E_B(X')$。

通过上述例题，可以看到确实用粗集粗糙熵来衡量粗集的粗糙程度要更精确。

进而，粗集的粗糙熵有下面性质。

定理5 设 $I^{\succ}=(U,A,F)$ 为一序信息系统，且 $B_1,B_2\subseteq A$。若 $U/R_{B_1}^{\geqslant}\subseteq U/R_{B_2}^{\geqslant}$，则对任意的 $X\subseteq U$ 有 $E_{B_1}(X)\leqslant E_{B_2}(X)$。

证明 由定理1和定理4立即可得。

推论3 设 $I^{\succ}=(U,A,F)$ 为一序信息系统，且 $B_1,B_2\subseteq A$。若 $B_2\subseteq B_1$，则对任意的 $X\subseteq U$ 有 $E_{B_1}(X)\leqslant E_{B_2}(X)$。

以上性质告诉我们粗集的粗糙熵随着知识的分辨能力的增强而单调下降。

5 结束语

在实际问题中有许多信息系统由于各种原因（如噪声、信息缺损等）并不是基于等价关系的，而是基于优势关系，这就极大地限制了粗糙集理论的研究与应用。为此，本文在序信息系统中通过引入熵的概念，给出了序信息系统的知识熵有关性质，并证明了知识的粗糙熵随着知识确定程度的增强而单调下降的结论，从而给出了序信息系统的信息解释。进一步结合知识的粗糙熵与粗集的粗糙度给出了粗集粗糙熵的概念，证明了粗集粗糙熵也是随着知识确定程度的增强而单调下降的结论，进而说明了粗糙集的粗糙熵比粗糙度可以更精确地度量粗集的粗糙程度。这些结论为序信息系统的知识发现和知识获取奠定了一定的理论基础。（收稿日期：2007年1月）

参考文献：

[1] Pawlak Z.Rough Sets:Theoretical aspects of reasoning about data[M].Boston:Kluwer Academic Publishers,1991.

[2] Greco S,Matarazzo B,Slowingski R.Rough approximation of a preference relation by dominance relation[J].European Journal of Operation Research,1999(117):63-83.

[3] Greco S,Matarazzo B,Slowingski R.A new rough set approach to multicriteria and multiattribute classificatioin[C]//Polkowsik L,Skowron A.Rough Sets and Current Trends in Computing(RSCTC'98),Lecture Notes in Artificial Intelligence.Berlin:Springer-Verlag,1998:1424,60-67.

[4] Greco S,Matarazzo B,Slowingski R.A new rough sets approach to evaluation of bankruptcy risk[M]//Zopounidis X.Operational Tools in the Management of Financial Risks.Dordrecht:Kluwer,1999:121-136.

[5] Leuang Y,Wu W Z,Zhang W X.Knowledge acquisition in incomplete information systems:a rough set approach[J].European Journal of Operational Research,2006,168(1):164-180.

[6] Wu W Z,Leuang Y,Mi J S.On characterizations of (I,T)-fuzzy rough approximation operators[J].Fuzzy Sets and Systems,2005,154(1):76-102.

[7] 张文修，梁怡，吴伟志.信息系统与知识发现[M].北京：科学出版社，2003.

[8] Wu W Z,Zhang M,Li H Z,et al.Knowledge reduction in random information systems via Dempster-Shafer theory of evidence[J].Information Sciences,2005,174(3/4):143-164.

[9] Shao M W,Zhang W X.Dominance relation and rules in an incomplete ordered information system[J].International Journal of Intelligent Systems,2005,20:13-27.

[10] 苗夺谦，王珏.粗糙集理论中知识熵与信息熵关系的讨论[J].模式识别与人工智能，1998，11(3):34-40.

[11] 苗夺谦，王珏.粗糙集理论中概念与运算的信息表示[J].软件学报，1999，10(2):113-116.

[12] Wang G Y.Algebra view and information view of rough sets theory:data mining and knowledge discovery theory,tools,and technology III[C]//Proceedings of SPIE,2001,4384:200-207.

[13] Liang J Y,Xu Z B.Uncertainty measures of roughness of knowledge and rough sets in incomplete information systems[C]//Proceeding of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation,2000(4):2526-2529.