2007 年 4 月 咸阳师范学院学报 Apr.2007
第 22 卷 第 2 期 Journal of Xianyang Normal University Vol.22 No.2

【计算机科学与应用研究】

模糊粗糙集中依参数粗糙度的新算法

张晓燕[1]，宋笑雪[2,3]，徐伟华[3]

(1.广东海洋大学理学院 数学与计算科学系，广东 湛江 524088；2.咸阳师范学院 计算机系，陕西 咸阳 712000；3.西安交通大学 理学院信息与系统科学所，陕西 西安 710049)

摘 要：自 M.Banerjee 和 S.K.pal 提出了模糊粗糙集的基本模型以来，模糊粗糙集一直是粗糙集理论研究的一个重要课题。本文在模糊粗糙集基本模型基础上首先从 λ-模糊截集的概念出发，提出了基于 λ-模糊截集的上、下近似的概念，给出了依参数粗糙度的新计算方法，从而使模糊粗糙集中依参数粗糙度得到了显著的改进，并通过具体实例证明了该方法的有效性，特别是当处理的数据较多时该方法尤为优越。

关键词：粗糙模糊集；依参数粗糙度；λ-模糊截集

中图分类号：TP18 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-2914(2007)02-0035-03

粗糙集理论[1]是波兰数学家 Pawlak 于 20 世纪 80 年代提出的用于数据分析的理论。由于粗糙集理论是一种刻画不完整性和不确定性的数学工具，能够有效地分析处理不精确、不协调等不完备信息，并从中发现隐含的知识，揭示潜在的规律，因此，作为一种具有极大潜力和有效的软计算工具受到了人工智能工作者的广泛关注[6-12]。

将粗糙集和其他软计算方法，如模糊集、人工神经网络、遗传算法等相综合，发挥出各自的优点，有望设计出具有较高的机器智商的混合系统，这一直是国内外科学研究努力的方向。近年来有许多学者[2-5]致力于将这两门理论结合起来，研究它们的联系与区别，并提出了模糊粗糙集等许多新的概念，而且取得了很大的成就。在众多研究当中，大部分都是采用 λ-截集的方法去着手研究的。本文也是采用这种方法，对模糊粗糙集的依参数粗糙度进行了更进一步的探讨。首先从 λ-模糊截集出发引出基于 λ-模糊截集的上、下近似的概念，并利用这两个概念优化了依参数粗糙度的计算方法，通过具体实例可以发现我们给出的新的计算方法比原来的更为方便。特别是当处理的数据较多时，改进后的方法显得十分优越。

1 λ-截集和依参数粗糙度

在很多现实问题和实际系统中均不同程度存在着不确定性因素，而且有许多是没有明确界限的，在一定意义上它是一种过渡状态，如“张三是年轻人，李四是老年人”等等。为了描述这种不分明的状态，必须将经典集合推广到模糊集合，把经典集合的特征函数扩充为模糊集合的隶属函数，即从论域 U 到[0, 1]的一个映射。为了方便理解，下面首先给出本文所需要的基本概念和性质。详细解释以及证明过程可见文献[6, 7]。

定义 1.1 论域 U 上的一个模糊集合 A 是由 U 上的隶属函数 A: $U\to[0,1]$来表示。其中 $A(x)$表示元素 x 隶属于 A 的程度。并记 U 上的模糊集合全体为 $F(U)$。

对于 $A\in A(U)$和 $\lambda\in[0,1]$，记：

$A_\lambda=\{x\in U|A(x)\geq\lambda\}$

称 A_λ 为 A 的 λ-截集。集合$\{x\in U|A(x)>0\}$称为 A 的支集，记为 supp A。

1996 年 M.Banerjee 和 S.K.pal 提出了模糊粗糙集的概念。

定义 1.2 设(U, R)是 Pawlak 近似空间，即 R 是论域 U 上的一个等价关系，若 A 是 U 上的一个模糊集合，则 A 关于(U, R)一对下近似 $\underline{R}(A)$和上近似 $\overline{R}(A)$定义为 U 上的一对模糊集合，其隶属函数分别定义为：

$$\underline{R}(A)(x)=\min\{A(y),y\in[x]_R\},\ x\in U;$$

$$\overline{R}(A)(x)=\max\{A(y),y\in[x]_R\},\ x\in U。$$

其中$[x]_R$ 为元素在关系 R 下的等价类，若 $\underline{R}(A)=\overline{R}(A)$则称 A 是可定义的，否则 A 是模糊粗糙集。

收稿日期：2006-11-25

基金项目：咸阳师范学院科研基金项目(06XSYK110)。

作者简介：张晓燕(1979-)，女，广东海洋大学理学院数学与计算科学系教师，硕士，主要从事粗糙集，模糊集，动力系统理论研究。

命题 1.1 设(U, R)是 Pawlak 近似空间，A 是 U 上的模糊集合，则 A 关于(U, R)一对下近似$\underline{R}(A)$和上近似$\overline{R}(A)$有以下性质：

(1) $\underline{R}(A)\subseteq A\subseteq\overline{R}(A)$。

(2) $\overline{R}(A\cup B)=\overline{R}(A)\cup\overline{R}(B)$;
$\underline{R}(A\cap B)=\underline{R}(A)\cap\overline{R}(B)$。

(3) $\underline{R}(A)\cup\underline{R}(B)\subseteq\underline{R}(A\cup B)$;
$\overline{R}(A\cap B)\subseteq\overline{R}(A)\cap\overline{R}(A)$。

(4) $\underline{R}(\sim A)=\sim\overline{R}(A)$;　$\overline{R}(\sim A)=\sim\underline{R}(A)$。

(5) $\overline{R}(\overline{R}(A))=\underline{R}(\overline{R}(A))=\overline{R}(A)$;
$\underline{R}(\underline{R}(A))=\overline{R}(\underline{R}(A))=\underline{R}(A)$。

(6) $\underline{R}(U)=U$; $\overline{R}(\phi)=\phi$。

(7) 若 $A\subseteq B$，则$\underline{R}(A)\subseteq\underline{R}(B)$，且$\overline{R}(A)\subseteq\overline{R}(B)$。

由定义 2.2 给出的下近似和上近似是一对模糊集合，如果将模糊集合用知识库(U, R)中的经典集合结合起来描述，则可以通过模糊集的截集来过渡。

定义 1.3 设(U, R)是 Pawlak 近似空间，A 是 U 上的模糊集合，则 A 关于近似空间(U, R)依参数 $\alpha,\beta(0<\beta\leq\alpha\leq 1)$的下近似$\underline{R}(A)_\alpha$和上近似$\overline{R}(A)_\beta$分别定义为

$$\underline{R}(A)_\alpha=\{x\in U|\underline{R}(A)(x)\geq\alpha\};$$
$$\overline{R}(A)_\beta=\{x\in U|\overline{R}(A)(x)\geq\beta\}。$$

这里 $\underline{R}(A)_\alpha$ 可以解释为 U 中肯定属于模糊集合 A 的隶属程度不小于 α 的那些对象的全体，$\overline{R}(A)_\beta$ 可以解释为 U 中可能属于模糊集合 A 的隶属程度不小于 β 的那些对象的全体。

在模糊粗糙集中依参数粗糙度的概念为：

定义 1.4 设(U, R)是 Pawlak 近似空间，$A\in F(U)$，对于$(0<\beta\leq\alpha\leq 1)$，定义 A 在近似空间 R(U, R)中依参数 α,β 的粗糙度如下

$$\rho_A(\alpha,\beta)=1-\frac{|\underline{R}(A)_\alpha|}{|\overline{R}A)_\beta|}$$

特别当 $\overline{R}(A)_\beta=\phi$ 时，$\rho_A(\alpha,\beta)=0$。

依参数粗糙度具有许多性质，这里不再赘述，详见文献[1,6,7]。

2 依参数粗糙度的新算法

从 λ-模糊截集出发，给出基于 λ-模糊截集的上、下近似的概念，进而改进了依参数粗糙度，给出了新的计算方法。

定义 2.1 设 $A\in F(U)$，$\lambda\in[0,1]$，称$\tilde{A}_\lambda\in F(U)$为 λ-模糊截集，其中$\tilde{A}_\lambda$ 的隶属函数为

$$\tilde{A}_\lambda(x)=\begin{cases}A(x), & 当\ A(x)\geq\lambda\\ 0, & 其它\end{cases}。$$

由以上定义，我们可以直接得到下面定理：

定理 2.1 (1)对$\forall\lambda\in[0,1]$，有$\tilde{A}_\lambda\subseteq A$，

且 supp $\tilde{A}_\lambda\subseteq$ supp A。

(2)若 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，且 $\lambda_1\leq\lambda_2$，则有$\tilde{A}_{\lambda_2}\subseteq\tilde{A}_{\lambda_1}$，和 supp $\tilde{A}_{\lambda_2}\subseteq$ supp$\tilde{A}_{\lambda_1}$ 。

从这个定理我们可以看出，λ-模糊截集$\tilde{A}_\lambda$ 是模糊集 A 的一部分，并且 λ-模糊截集是随着 λ 的增加而减小的。

设(U, R)是 Pawlak 近似空间，R 是论域 U 上的一个等价关系，若 $A\in F(U)$，我们有：

定义 2.2 模糊集 A 基于 λ-模糊截集$\tilde{A}_\lambda$ 的下近似 $\underline{R}_\lambda(A)$ 和上近似 $\overline{R}_\lambda(A)$ 定义为 U 上的一对模糊集合，其隶属函数分别为

$$\underline{R}_\lambda(A)(x)=\min\{\tilde{A}_\lambda(y), y\in[x]_R\},\ x\in U,$$
$$\overline{R}_\lambda(A)(x)=\max\{\tilde{A}_\lambda(y), y\in[x]_R\},\ x\in U。$$

其中$[x]_R$为元素x在关系 R 下的等价类。

显然，由以上定义立即可得

定理 2.2 (1)设 $\underline{R}_\lambda(A)$和 $\overline{R}_\lambda(A)$是 A 基于 λ-模糊截集的下、上近似，$\underline{R}(A)$和 $\overline{R}(A)$是 A 的下、上近似，则有 $\underline{R}_\lambda(A)\subseteq\underline{R}(A)$，$\overline{R}_\lambda(A)\subseteq\overline{R}(A)$。

(2) 若 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ 且$\lambda_1\leq\lambda_2$

则有 $\underline{R}_{\lambda_2}(A)\subseteq\underline{R}_{\lambda_1}(A)$，$\overline{R}_{\lambda_2}(A)\subseteq\overline{R}_{\lambda_1}(A)$ 。

事实上，我们可以看出，$A\in F(U)$的基于 λ-模糊粗糙截集的上、下近似是 A 的上、下近似的一部分，正是由于这个性质我们改进了依参数粗糙度。

我们引入下面记号：

$$C\underline{R}_\lambda(A)=\{x|\underline{R}_\lambda(A)(x)\neq 0\},\ x\in U$$
$$C\overline{R}_\lambda(A)=\{x|\overline{R}_\lambda(A)(x)\neq 0\},\ x\in U$$

于是有

定理 2.3 $C\underline{R}_\lambda(A)=\underline{R}(A)_\lambda$，$C\overline{R}_\lambda(A)=\overline{R}(A)_\lambda$，其中 $\lambda\in[0,1]$。

证明 我们这里只证$C\underline{R}_\lambda(A)=\underline{R}(A)_\lambda$，$C\overline{R}_\lambda(A)=\overline{R}(A)_\lambda$ 同理可证。

"⇒" 对$\forall x\in U$，若$x\in C\underline{R}_\lambda(A)$，则有：$\underline{R}_\lambda(A)(x)\neq 0$。于是 $\min\{\tilde{A}_\lambda(y), y\in[x]_R\}\neq 0$，由$\tilde{A}_\lambda(\cdot)$定义可知 $A(y)\geq\lambda$，$y\in[x]_R$。故有 $\underline{R}(A)(x)=\min\{A(y), y\in[x]_R\}\geq\lambda$，即：$x\in\underline{R}(A)_\lambda$。

"⇐" 对$\forall x\in U$，若 $x\in\underline{R}(A)_\lambda$，则有：$\underline{R}(A)(x)=\min\{A(y), y\in[x]_R\}\geq\lambda$，故可知 $A(y)\geq\lambda$，$y\in[x]_R$，即$\tilde{A}_\lambda(y),=A(y)\neq 0$，$y\in[x]_R$，于是 $\underline{R}_\lambda(A)(x)=\min\{\tilde{A}_\lambda(y), y\in[x]_R\}\neq 0$，即$x\in C\underline{R}_\lambda(A)$。

因此有 $C\underline{R}_\lambda(A)=\underline{R}(A)_\lambda$ 成立。

于是根据以上定理，我们可以对依参数(α,β)的粗糙度进一步改进。

定理 2.4 设(U, R)是 Pawlak 近似空间，R 是论域 U 上的一个等价关系，$A\in F(U)$，对于 $0<\beta\leq\alpha\leq 1$，有

$$\rho_A(\alpha,\beta)=1-\frac{|\underline{R}(A)_\alpha|}{|\overline{R}(A)_\beta|}=1-\frac{|C\underline{R}_\alpha(A)|}{|C\overline{R}_\beta(A)|}$$

特别当$\overline{R}(A)_\beta=\phi$ 时，$\rho_A(\alpha,\beta)=0$。

证明　由定理 3.3 即可获证。

在上面定理中我们用 $C\underline{R}_\alpha(A)$和 $C\overline{R}_\beta(A)$取代了原来的 $\underline{R}(A)_\alpha$ 和 $\overline{R}(A)_\beta$。由于 $C\underline{R}_\alpha(A)$和 $C\overline{R}_\beta(A)$是在 λ-模糊截集的基础上提出来的，这就使得 $C\underline{R}_\alpha(A)$和 $C\overline{R}_\beta(A)$中的元素相对比较容易得到，只需看 $\underline{R}_\alpha(A)$和 $\overline{R}_\beta(A)$是否为零即可。这样方便了依参数粗糙度的计算，尤其是当数据比较多时这一改进后的方法显得尤为优越。

3　实例分析

我们通过下面的例子进一步分析上面给出的新计算方法的有效性。

例 1 设 $U=\{x_i|i=1,2,\cdots,8\}$为某一组被研究的 8 名学生，他们被分成了 4 个部分。

$U/R=\{\{x_1,x_5\},\{x_2\},\{x_3,x_4,x_6\},\{x_7,x_8\}\}$。

设模糊集合 A 表示模糊概念“个子高”，其隶属函数为

$$A=\left\{\frac{x_1}{0.5},\frac{x_2}{0.3},\frac{x_3}{0.3},\frac{x_4}{0.6},\frac{x_5}{0.5},\frac{x_6}{0.8},\frac{x_7}{1},\frac{x_8}{0.9}\right\}$$

若取 α=0.6, β=0.4，则

$$\underline{R}_{0.4}(A)=\left\{\frac{x_1}{0.5},\frac{x_2}{0},\frac{x_3}{0},\frac{x_4}{0},\frac{x_5}{0.5},\frac{x_6}{0},\frac{x_7}{0.9},\frac{x_8}{0.9}\right\};$$

$$\overline{R}_{0.4}(A)=\left\{\frac{x_1}{0.5},\frac{x_2}{0},\frac{x_3}{0.8},\frac{x_4}{0.8},\frac{x_5}{0.5},\frac{x_6}{0.8},\frac{x_7}{1},\frac{x_8}{1}\right\};$$

$$\underline{R}_{0.6}(A)=\left\{\frac{x_1}{0},\frac{x_2}{0},\frac{x_3}{0},\frac{x_4}{0},\frac{x_5}{0},\frac{x_6}{0},\frac{x_7}{0.9},\frac{x_8}{0.9}\right\};$$

$$\overline{R}_{0.6}(A)=\left\{\frac{x_1}{0},\frac{x_2}{0},\frac{x_3}{0.8},\frac{x_4}{0.8},\frac{x_5}{0},\frac{x_6}{0.8},\frac{x_7}{1},\frac{x_8}{1}\right\}.$$

由第三部分内容可得：

$$C\underline{R}_{0.6}(A)=\{x_7,x_8\};\quad C\overline{R}_{0.6}(A)=\{x_1,x_3,x_4,x_6,x_7,x_8\}$$

因此：

$$\rho_A(0.4,0.6)=1-\frac{|C\underline{R}_{0.6}(A)|}{|C\overline{R}_{0.4}(A)|}=1-\frac{2}{9}=0.778$$

参考文献：

[1]Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[2]M. Banerjee, S.K.Pal, Roughness of fuzzy set, Information[J]. Science. 1996: 235-246.

[3] M. Banerjee, S. Mitra, S.K.Pal, Rough fuzzy MLP: knowledge encoding and classification [J].IEEE TransNeural Networks, 1998 (9) :1203-1216.

[4]K. Chakrabarty, R. Biswas, S. Nanda.Fuzziness in rough sets [J]. Fuzzy sets and Systems. 2000, 110 (2) : 247-251.

[5]J. N. Mordeson.Rough set theory applied to (fuzzy) ideal theory[J].Fuzzy sets Systems. 2001, 121 (2): 315-324.

[6]A. M. Radzikowska, E. E. Kerre, A comparative study of fuzzy rough sets[J].Fuzzy sets Systems. 2002, 126 (6):137-156.

[7]张文修,吴伟志, 梁吉业,等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社, 2001

[8]张文修,梁怡, 吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京：科学出版社, 2003.

[9]宋笑雪. 粗糙集理论及应用[J]. 咸阳师范学院学报,2005,20(2):30-33.

[10]宋笑雪,李鸿儒,张文修. 集值决策信息系统的知识约简与属性特征[J]. 计算机科学,2006,33(7):179-181.

[11]徐伟华, 张文修. 基于优势关系下协调近似空间[J]. 计算机科学, 2005, 32(9): 164-165

[12] 徐伟华, 张文修. 基于优势关系下不协调目标信息系统的知识约简[J]. 计算机科学, 2006, 33(2): 182-184.

A New Method for the Roughness Measure of a Fuzzy Set

ZHANG Xiao-yan[1], SONG Xiao-xue[2,3], XU Wei-hua[3]

(1. Department of Mathematic and Computational sciences, Guangdong Ocean University, Zhanjiang, Guangdong 524088;

2. Department of computer, Xianyang Normal University, Xianyang,Shaanxi 712000;

3. Institute of Information and System Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049,China)

Abstract: It is very important to study fuzzy rough sets in rough sets theory, since the definition of fuzzy rough sets was introduced by M. Banerjee and S.K. pal. In this paper, fuzzy rough sets based on λ-fuzzy cut sets were studied continuously, and the definition of upper and lower approximation based on λ-fuzzy cut sets were introduced. Furthermore, a new method of the roughness measure of a fuzzy set was proposed, and it was shown that the method was valuable by the example finally.

Key words: Rough set; Fuzzy set; Roughness measure of a fuzzy set; λ-fuzzy cut set