Operations Research and Fuzziology 运筹与模糊学, 2011, 1, 6-10
doi:10.4236/orf.2011.11002 Published Online August 2011 (http://www.hanspub.org/journal/orf/)

The Research of Several Propositions on Starshaped Fuzzy Sets

Weihua Xu, Wenxin Sun, Yufeng Liu
School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology, Chongqing
Email: chxuwh@gmail.com
Received: Jul. 7th, 2011; revised: Jul. 20th, 2011; accepted: Jul. 25th, 2011.

Abstract: Starting from the definition of the starshaped fuzzy set, this paper introduces the concept of fuzzy quasi-starshaped set and fuzzy pseudo-starshaped set. Some equivalent discrimination conditions on the kind of starshaped fuzzy sets are given by studying the key propositions of them. Furthermore, the relationships among convex fuzzy, fuzzy numbers and them are deeply researched, which enrich and perfect the theory of the starshaped fuzzy set.

Keywords: Starshaped Fuzzy Set; Convex Fuzzy Set; Fuzzy Numbers; Fuzzy Quasi-Starshaped Set; Fuzzy Pseudo-Starshaped Set

星形模糊集的若干性质研究

徐伟华，孙文鑫，刘玉锋
重庆理工大学数学与统计学院，重庆
Email: chxuwh@gmail.com
收稿日期：2011 年 7 月 7 日；修回日期：2011 年 7 月 20 日；录用日期：2011 年 7 月 25 日

摘 要：本文从星形模糊集的定义出发，引出了拟星形模糊集和伪星形模糊集的概念，通过研究其各自重要性质给出了对应星形模糊集的若干等价判别条件；进一步，本文深入研究了它们与凸模糊集、模糊数之间的关系，丰富和完善了星形模糊集的理论。

关键词：星形模糊集；凸模糊集；模糊数；拟星形模糊集；伪星形模糊集

1. 引言

1965 年，美国计算机与控制论专家 L. A. Zedeh 教授在《信息与控制》杂志上发表了一篇开创性论文《模糊集合》，标志着模糊数学这门学科的诞生[1]。模糊数学作为描述不确定性问题的一种方法，不管是在理论上还是在应用中，都扮演了一个很重要的角色，是目前刻画不精确或者不完全数据的一种有效方法[2]。该理论已成功应用于模糊控制、模糊识别、模糊聚类分析、模糊决策、模糊评判、系统理论、信息检索、医学、生物学等各个方面[3]，并取得了很好的成果。

作为模糊集理论的推广，近年来特别引人注意的方向就是对星形模糊集[4](starshaped fuzzy sets)的研究。目前，国际上对于星形模糊集理论的研究比较活跃，特别是将模糊集中的相关理论与方法推广到星形模糊集并取得了大量研究成果[5]。邱东讨论了星形模糊集、拟星形模糊集、伪星形模糊集的性质，以及它们之间的关系[6]。然而如何判断某些模糊集是否为星形模糊集仍然存在困难，而且有关星形模糊集与凸模糊集的研究也相对甚少。

基于上述原因，本文首先研究星形模糊集、拟星形模糊集、伪星形模糊集的若干性质，并给出了其等价命题，进一步，本文探讨了它们与凸模糊集、模糊数之间的关系。

2. 星形模糊集

对于一个经典的集合 $S \subseteq R^n$，如果存在 $x \in R^n$，对于任意的 $y \in S$ 有 $\left\{\alpha x+\beta y \mid x \in R^n\ y \in S, \alpha+\beta=1\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0\right\} \subseteq S$，则称 S 是相对于 x 的星形集。

若存在 $x \in R^n$，使得 S 相对于 x 是星形集，则称 S 为星形集。

将这种经典情形推广到模糊情形便有如下星形模糊集。

定义 2.1[6] 设 $\mu \in f\left(R^n\right)$ 为正规模糊集，若对任意的 $x \in R^n$，存在 $y \in R^n$，使得对任意的 $\lambda \in [0,1]$，有 $\mu(\lambda(x-y)+y) \geq \mu(x)$，则称 μ 是相对于 y 的星形模糊集。

例 2.1 设 $\mu \in f(R)$

$$\mu(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & x \in(-\infty, 0) \\ \mathrm{e}^{-x}, & x \in[0,+\infty)\end{cases}$$

显然 μ 在 $y=0$ 处的隶属度为 1，且 $\mu(x)$ 对于任意的 $x \in R, \lambda \in[0,1]$ $\mu(\lambda(x-y)+y) \geq \mu(x)$。因此 μ 是相对于 $y=0$ 的星形模糊集。

命题 2.1 设 $\mu \in f\left(R^n\right)$ 为正规模糊集，若 μ 是相对于 y 的星形模糊集，当且仅当存在 $y \in R^n$ 且 $\mu(y)=1$，对于任意的 $x \in R^n$，$\lambda \in[0,1]$，有

$\mu(\lambda(x-y)+y) \geq \mu(x)$。

证明 充分性：因为 μ 是相对于 y 的星形模糊集，故存在 $y \in R^n$ 使得对任意的 $x \in R, \lambda \in[0,1]$ 有

$$\mu(\lambda(x-y)+y) \geq \mu(x) \tag{1}$$

当 $\lambda=0$ 时，(1)式变为 $\mu(y) \geq \mu(x)$，由 x 的任意性，即得 $\mu(y)=\sup \mu(x)$ 又因为 $\mu \in f\left(R^n\right)$ 为正规模糊集，故 $\mu(y)=\sup \mu(x)=1$。

必要性：由星形模糊集的定义即可得证。

命题 2.2 设 $\mu \in f(R)$ 为正规模糊集，若 μ 是相对于 y 的星形模糊集，当且仅存在 $y \in R$，对于任意的 $x \in R$，有

(1) 当 $x \in[y,+\infty)$ 时，$\mu(x)$ 是单调递减的；

(2) 当 $x \in(-\infty, y]$ 时，$\mu(x)$ 是单调递增的。

证明 充分性：因为 μ 是相对于 y 的星形模糊集，故存在 $y \in R$ 使得对任意的 $x \in R\ \lambda \in[0,1]$ 有 $\mu(\lambda(x-y)+y) \geq \mu(x)$。若 $x \in[y,+\infty)\ \lambda \in[0,1]$ 有 $\lambda(x-y)+y \leq x$，又由于 $\mu(\lambda(x-y)+y) \geq \mu(x)$；根据 x、λ 的任意性可证得 $\mu(x)$ 在 $[y,+\infty)$ 是单调递减的。同理可证 $\mu(x)$ 在 $(-\infty, y]$ 是单调递增的。

必要性：因为存在 $y \in R$ 使得对于任意的 $x \in R$，当 $x \in[y,+\infty)$ 时，$\mu(x)$ 是单调递减的，当 $x \in(-\infty, y]$ 时，$\mu(x)$ 是单调递增的，所以对于任意的 $x \in R$ 有 $\mu(y) \geq \mu(x)$，即 $\mu(y)=\sup \mu(x)=1$。又由于 $x \in[y,+\infty)\ \lambda \in[0,1]$ 有 $\lambda(x-y)+y \leq x$；$x \in(-\infty, y]$ $\lambda \in[0,1]$ 有 $\lambda(x-y)+y \geq x$。根据 $\mu(x)$ 的单调性可知，对于任意的 $x \in R$、$\lambda \in[0,1]$ 有 $\mu(\lambda(x-y)+y) \geq \mu(x)$。综上所述 μ 是相对于 y 的星形模糊集。

例 2.2 设 $\mu \in f(R)$ 且

$$\mu(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-a|}{b}, & a-b<x<a+b, b>0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然当 x=a 时 $\mu(a)=1$。即 $\mu(x)$ 是正规模糊集，$\mu(x)$ 的图像如图 1 所示。

从图 1 容易看到 $\mu(x)$ 在 $[a-b, b]$ 是单调增函数，在 $[b, a+b]$ 是单调减函数；根据命题 2.2 可证得 $\mu(x)$ 是相对于 a 的星形模糊集。

例 2.2 根据定义是很难证明的，然而根据命题 2.2 很容易证出它是相对于 a 的星形模糊集。

性质 2.1 若 $\mu \in f(R)$ 是相对于 y 的星形模糊集，那么 μ 一定是凸模糊集。

证明 因为 $\mu \in f(R)$ 是相对于 y 的星形模糊集，所以 $\mu(y)=1$。而且对于任意的 $x \in R$，当 $x \geq y$ 时 $\mu(x)$ 是单调减函数，当 $x \leq y$ 时 $\mu(x)$ 是单调增函数。

于是对于任意的 $x_1\ x_2\ x_3 \in R$，且 $x_1 \geq x_2 \geq x_3$。若

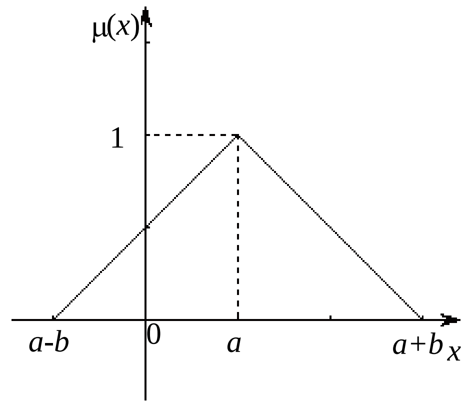

Figure 1. The fuzzy set in Example 2.2
图 1. 例 2.2 的模糊集

1) $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge y$ 有 $\mu(x_1) \le \mu(x_2) \le \mu(x_3)$，故 $\mu(x_2) \ge \mu(x_1) \wedge \mu(x_3)$；

2) $x_1 \ge x_2 \ge y \ge x_3$ 有 $\mu(x_1) \le \mu(x_2)$，故 $\mu(x_2) \ge \mu(x_1) \wedge \mu(x_3)$；

3) $x_1 \ge y \ge x_2 \ge x_3$ 有 $\mu(x_2) \ge \mu(x_3)$，故 $\mu(x_2) \ge \mu(x_1) \wedge \mu(x_3)$。

综上所述对于任意的 $x_1\ x_2\ \ x_3 \in R$，且 $x_1 \ge x_2 \ge x_3$ 有 $\mu(x_2) \ge \mu(x_1) \wedge \mu(x_3)$ 成立。

故 μ 是凸模糊集。

推论 2.1 若 $\mu \in f(R)$ 是相对于 y 的星形模糊集，那么任意的 $\lambda \in [0,1]$，$[\mu]^\lambda$ 都是区间。

推论 2.2 若 $\mu \in f(R)$ 是相对于 y 的星形模糊集，那么 μ 一定是模糊数。

定理 2.1[7] 设 A 为模糊数的充要条件是存在区间 $[a,b]$，使得

$$A(x) = \begin{cases} 1 & a \le x \le b \\ L(x) & x < a \\ R(x) & x > b \end{cases}$$

其中 $L(x)$ 为增函数，右连续，$0 \le L(x) < 1$，且 $\lim\limits_{x \to -\infty} L(x) = 0$。$R(x)$ 为减函数，左连续，$0 \le R(x) < 1$，且 $\lim\limits_{x \to -\infty} R(x) = 0$。

定理 2.2 若 $A \in f(R)$ 为模糊数，那么一定存在 $y \in R$，使得 A 是相对于 y 的星形模糊集。

证明 设 A 为模糊数，则根据定理 2.1 存在区间 $x \in [a,b]$ 使得 $A(x) = 1$。故 A 是正规模糊集。又因 $x < a$，$A(x)$ 为增函数；$x > b$，$A(x)$ 为减函数．故存在 $y \in [a,b]$ 使得对于任意的 $x \in R$，当 $x \in [y,+\infty)$ 时 $A(x)$ 是单调递减的，当 $x \in (-\infty, y]$ 时，$A(x)$ 是单调递增的。根据命题 2.2 可证得 A 是相对于 y 的星形模糊集。

性质 2.1[6] 若 $\mu \in f(R^n)$ 是相对于 y 的星形模糊集，当且仅当任意的 $\lambda \in [0,1]$ $[\mu]^\lambda$ 都是星形集。

定义 2.2[8] 设 $\mu_1 \in f(R^n), \mu_2 \in f(R^n)$，则 μ_1 和 μ_2 的卡氏积 $\mu_1 \times \mu_2$ 定义为 $\mu_1 \times \mu_2$： $R^n \times R^n \to [0,1]$ $(x,y) \ \ \mapsto \min\{\mu_1(x), \mu_2(y)\}$， $\forall (x,y) \in R^n \times R^n$。

定理 2.2[8] 设 $\mu_1 \in f(R^n), \mu_2 \in f(R^n)$，任意的 $\lambda \in [0,1]$，$[\mu_1]^\lambda, [\mu_2]^\lambda$ 分别是 $\mu_1\ \mu_2$ 的截集，那么 μ_1 和 μ_2 的卡氏积 $\mu_1 \times \mu_2$ 的截集 $[\mu_1 \times \mu_2]^\lambda = [\mu_1]^\lambda \times [\mu_2]^\lambda$。

性质 2.3 设 $\mu_1 \in f(R^n), \mu_2 \in f(R^n)$ 都是相对于 y 的星形模糊集，那么 $\mu_1 \times \mu_2$ 也是相对于 y 的星形模糊集。

证明 $\mu_1 \times \mu_2$ 是相对于 y 的星形模糊集 $\Leftrightarrow \forall \lambda \in [0,1]$，$[\mu_1 \times \mu_2]^\lambda$ 是相对于 y 的星形模糊集 $\Leftrightarrow \forall \lambda \in [0,1]$，$[\mu_1]^\lambda \times [\mu_2]^\lambda$ 是相对于 y 的星形模糊集 $\Leftrightarrow \forall \lambda \in [0,1]$，$[\mu_1]^\lambda$ 且 $[\mu_2]^\lambda$ 是相对于 y 的星形模糊集 $\Leftrightarrow$ μ_1, μ_2 是相对于 y 的星形模糊集。

3. 拟星形模糊集

定义 3.1[6] 设 $\mu \in f(R^n)$ 为正规模糊集，若对任意的 $x \in R^n$，存在 $y \in R^n$，使得对任意的 $\lambda \in [0,1]$，有 $\mu(\lambda(x-y)+y) \ge \min\{\mu(x), \mu(y)\}$，则称 μ 是相对于 y 的拟星形模糊集。

例 3.1 设 $\mu \in f(R)$ 且 $\mu(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

如图 2 所示。

显然 $\mu(x)$ 是相对于 $y = 0$ 的拟星形模糊集。

命题 3.1 设 $\mu \in f(R^n)$ 为正规模糊集，若 μ 是相对于 y 的拟星形模糊集。当且仅当 $\mu(y) = \sup \mu(x) = 1$，且 μ 是相对于 y 的星形模糊集。

证明 充分性：因为对于任意的 $x \in R^n$，有 $\mu(\lambda(x-y)+y) \ge \mu(x)$，$\lambda \in [0,1]$。取 $\lambda = 0$ 可以得到 $\mu(y) \ge \mu(x)$。由命题 2.1 $\mu(y) = \sup \mu(x) = 1$。因此 $\mu(\lambda(x-y)+y) \ge \mu(x) = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$。故 μ 是相对于 y 的星形模糊集

必要性：因为 μ 是相对于 y 的星形模糊集且 $\mu(y) = \sup \mu(x) = 1$，所以对任意的 $x \in R^n$，$\lambda \in [0,1]$ 有 $\mu(\lambda(x-y)+y) \ge \min\{\mu(x), \mu(y)\} = \mu(x)$。

推论 3.1 若 $A \in f(R)$ 为模糊数，那么一定存在 $y \in R$，使得 A 是相对于 y 的拟星形模糊集。

性质 3.1 若 $\mu \in f(R^n)$ 是单调增函数(单调减函数)，那么存在 $y \in R^n$ 使得 $\mu \in f(R^n)$ 是相对于 y 的拟

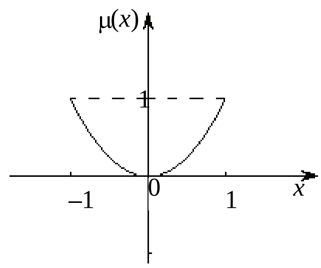

Figure 2. The fuzzy set in Example 3.1
图 2. 例 3.1 的模糊集

星形模糊集。

证明 因为 $\mu \in f\left(R^n\right)$ 是单调增函数，而且对于任意的 $x \in R^n$ 都有 $0 \le \mu(x) \le 1$。所以是单调有界函数。故存在 $y \in R^n$ 使得 $\mu(y) = \sup \mu(x)$。对于 $\forall x \in R^n$ 有 $\mu(y) \ge \mu(x)$。即对于 $\forall x \in R^n$ 有

$\mu(\lambda(x-y)+y) \ge \mu(x) = \min\{\mu(x), \mu(y)\} 0 \le \lambda \le 1$。即 μ 是相对于 y 的拟星形模糊集。

若 $\mu \in f\left(R^n\right)$ 是单调减函数，存在 $y \in R^n$ 使得 $\mu(y) = \inf \mu(x)$。对于 $\forall x \in R^n$ 有 $\mu(y) \le \mu(x)$。即对于 $\forall x \in R^n$ 有

$$\mu(\lambda(x-y)+y) \ge \mu(y) = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \quad 0 \le \lambda \le 1$$

故 $\mu \in f\left(R^n\right)$ 是相对于 y 的拟星形模糊集。

性质 3.2 设 $\mu \in f\left(R^n\right)$，若存在 $y \in R^n$ 使得 $\mu(y) = 0$，那么 μ 是相对于 y 的拟星形模糊集。

证明 因为对于任意的 $x \in R^n$ 都有 $0 \le \mu(x) \le 1$，所以对 $\forall x \in R^n$ 有 $\mu(y) \le \mu(x)$。因此对 $\forall x \in R^n$ 有 $\mu(\lambda(x-y)+y) \ge \mu(y) = \min\{\mu(x), \mu(y)\} \quad 0 \le \lambda \le 1$。故 μ 是相对于 y 的拟星形模糊集。

根据性质 3.2 很容易判断例 3.1 是拟星形模糊集。

注：拟星形模糊集不一定是凸模糊集。

例 3.2 设 $\mu \in f(R)$ 且

$$\mu(x) = \begin{cases} 2+x, & x \in [-2,-1] \\ x^2, & x \in (-1,1) \\ 2-x, & x \in [1,2] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$\mu(x)$ 是相对于 $y=0$ 的拟星形模糊集，从图 3 中很容易看到存在 λ 使得 $[\mu]^\lambda$ 不是区间，故 $\mu(x)$ 不是凸模糊集。

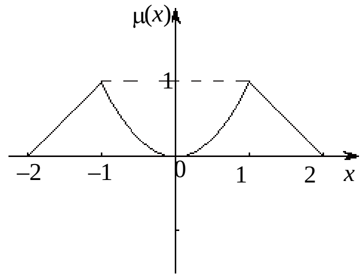

Figure 3. The fuzzy set in Example 3.2
图 3. 例 3.2 的模糊集

4. 伪星形模糊集

定义 4.1[6] 设 $\mu \in f\left(R^n\right)$ 是正规模糊集，若对任意的 $x \in R^n$，存在 $y \in R^n$，使得对任意的 $\lambda \in [0,1]$，有 $\mu(\lambda(x-y)+y) \ge \lambda\mu(x) + (1-\lambda)\mu(y)$，则称 μ 是相对于 y 的伪星形模糊集。

性质 4.1 设 $\mu_1\ \mu_2 \in f\left(R^n\right)$ 为正规模糊集，若 $\mu_1\ \mu_2$ 都是相对于 y 的伪星形模糊集，那么 $\min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$ 也是相对于 y 的伪星形模糊集。

证明 因为 $\mu_1\ \mu_2$ 都是相对于 y 的伪星形模糊集，所以对任意的 $x \in R^n$，存在 $y \in R^n$，使得对任意的 $\lambda \in [0,1]$，有

$$\mu_1(\lambda(x-y)+y) \ge \lambda\mu_1(x) + (1-\lambda)\mu_1(y) \tag{2}$$

$$\mu_2(\lambda(x-y)+y) \ge \lambda\mu_2(x) + (1-\lambda)\mu_2(y) \tag{3}$$

由(2)(3)可得

$$\mu_1(\lambda(x-y)+y) \ge \lambda \min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\} + (1-\lambda)\min\{\mu_1(y), \mu_2(y)\} \tag{4}$$

$$\mu_2(\lambda(x-y)+y) \ge \lambda \min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\} + (1-\lambda)\min\{\mu_1(y), \mu_2(y)\} \tag{5}$$

由(4)(5)式可得

$$\min\{\mu_1(\lambda(x-y)+y), \mu_2(\lambda(x-y)+y)\} \ge \lambda \min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\} + (1-\lambda)\min\{\mu_1(y), \mu_2(y)\}$$

因此 $\min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$ 也是相对于 y 的伪星形模糊集。

推论 4.1 设 $\mu_1\ \mu_2 \in f\left(R^n\right)$ 为正规模糊集，若 $\mu_1\ \mu_2$ 都是相对于 y 的拟星形模糊集，那么 $\min\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$ 也是相对于 y 的拟星形模糊集。

性质 4.2 设 $\mu \in f\left(R^n\right)$ 为正规模糊集，若 μ 是相对于 y 的伪星形模糊集，那么对于任意的 $x_1\ x_2 \in R^n$ 且 $x_1 > y > x_2$ 有 $\dfrac{\mu(y)-\mu(x_1)}{y-x_1} \le \dfrac{\mu(x_3)-\mu(y)}{x_3-y}$ 成立。

证明 记 $\lambda = \dfrac{x_3-y}{x_3-x_1}$ 则 $y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$。由于 μ 是相对于 y 的伪星形模糊集

$\mu(y) = \mu(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \ge \lambda\mu(x_1) + (1-\lambda)\mu(x_3)$，从而有

$$(x_3-y)\mu(y) + (y-x_1)\mu(y) \ge (x_3-y)\mu(x_1) + (y-x_1)\mu(x_3)$$

即有 $\dfrac{\mu(y)-\mu(x_1)}{y-x_1} \le \dfrac{\mu(x_3)-\mu(y)}{x_3-y}$。

注： 若 $\mu \in f(R)$ 是相对于 y 的伪星形模糊集，但 $\mu \in f(R)$ 不一定是凸模糊集，如图 4 所示。

例 **4.1** 设 $\mu \in f(R)$ 且

$$\mu(x)=\begin{cases} 1.5+x & x\in[-1.5,-0.5] \\ \dfrac{4-2x}{5} & x\in(-0.5,0) \\ \dfrac{4+2x}{5} & x\in[0,0.5] \\ 1.5-x & x\in(0.5,1.5] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

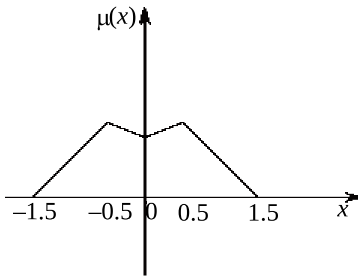

Figure 4. The fuzzy set in Example 4.1
图 4. 例 4.1 的模糊集

$\mu(x)$ 是相对于 $y=0$ 的伪星形模糊集。但是 $\mu(x)$ 不是凸模糊集。

5. 结论

星形模糊集是一种特殊的模糊集，它的特殊性体现在它的性质上。本文主要探讨了星形模糊集、拟星形模糊集、伪星形模糊集的性质。分析了它们与凸模糊集、模糊数之间的关系；补充了星形模糊集、拟星形模糊集的等价命题,进一步加深了人们对星形模糊集的认识，丰富和完善了星形模糊集的理论。

参考文献 (References)

[1] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
[2] 彭祖赠, 孙韫玉. 模糊数学(Fuzzy)及其应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.
[3] 陈亚娜, 石磊. 模糊控制在混合煤气压力与热值控制中的应用研究[J]. 机电产品开发与创新, 2008, 21(1): 160-161.
[4] P. Diamond. A note on fuzzy starshaped sets. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 37(2): 193-199.
[5] W. Wei, P. Goodey. Average section function for star-shaped sets. Advances in Applied Mathematics, 2006, 36(1): 70-84.
[6] D. Qiu, L. Shu, and Z. W. Mo. On starshaped fuzzy sets. Fuzzy Set and Systems, 2009, 160(11): 1563-1577.
[7] 杨纶标, 高英仪. 模糊数学原理及应用[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2008.
[8] E. E. Kerre, 黄崇福, 阮达. 模糊集理论与近似推理[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.

