Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 124-131
doi:10.4236/pm.2011.12025 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

On *h*-Completion for Maximal Subgroups and the Solvability of Finite Groups

Xiaoyan Zhang, Weihua Xu
School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology, Chongqing
Email: zhangxyms@gmail.com
Received: Apr. 2nd, 2011; revised: May 28th, 2011; accepted: May 30th, 2011.

Abstract: In this paper, we propose new definition of an h-completion for a maximal subgroup M of a group G, that is a θ-completion C such that either $C = G$ or there exist a subgroup D of G which is not a θ-completion for M and $C < D$ holds. This method can weaken the imposed maximality on θ-completion. Moreover, we studied the solvability and of finite groups by means of h-completion and obtained some important properties, which are very useful to research deeply finite groups.

Keywords: Finite Group; h-Completion; Solvability

极大子群的 *h*–完备与群的可解性

张晓燕，徐伟华
重庆理工大学数学与统计学院，重庆
Email: zhangxyms@gmail.com
收稿日期：2011 年 4 月 2 日；修回日期：2011 年 5 月 28 日；录用日期：2011 年 5 月 30 日

摘要：本文给出了有限群 G 极大子群 M h-完备的定义，即称 C 为 M 的 h-完备,若 C 是 M 的 θ-完备，且有 $C = G$ 或存在 G 的一个子群 D 使得 D 不是 M 的 θ-完备，但有 $C < D$ 成立. 从而，可以通过这个定义把 θ-完备的极大性削弱，并得到了有关群可解性的重要结论，丰富了有限群理论。

关键词：有限群；θ–完备；h–完备；可解性

1. 引言

有限群极大子群对于群的结构起着非常重要的作用，并且对群的许多性质有很大影响。W.E. Deskins 在文[1]中给出了有限群极大子群完备的定义，并且利用这一工具得到了有关群可解性的许多重要结论。诸如：

命题 1 群 G 可解当且仅当对 G 的每一个极大子群 M，都存在 $I(M)$ 的极大元 C，使得 $C/K(C)$ 是幂零的，且其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2 。

命题 2 群 G 可解当且仅当 G 的每个合数指数的极大子群 M， $I(M)$ 包含一个极大元 C， 使得 $C/K(C)$ 是幂零的，并且有 $C^g \not\subseteq M$，对一切 $g \in G$ 成立。

命题 3 群 G 可解当且仅当 G 的每个合数指数的极大子群 M， $I(M)$ 包含一个极大元 C， 使得 $C/K(C)$ 无平方因子，且有 $G = CM$ 。

同时在文[2]中 N. P. Mukherjee 和 P. Bhattacharya 又引出了 θ-偶的定义。之后，赵耀庆在文[5]中给出了 θ-完备的概念，并且利用这一工具讨论了群的可解性和超可解性，得到一系列的结论，主要有：

命题 4 群 G 可解当且仅当 G 的每个合数指数且包含某一 Sylow 子群的正规化子的极大子群 M 存在一个极大 θ-完备 C， 使得 C/M_G 是幂零的，并且有

$C^g \not\subseteq M$，对一切 $g \in G$ 成立。

命题 5 群 G 可解当且仅当 G 的每个合数指数且包含某一 Sylow 子群的正规化子的极大子群 M 存在一个极大 θ-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，且有 $G=CM$.

从上面的结论可以发现它们对有限群的可解性均要求比较强，即要求它们的"极大性"的存在，这对于群的研究稍有不便。因此寻找可以削弱或忽略这一"极大性"的方法成了一个比较有趣且尤为重要的课题。在文[3]中李世荣、赵耀庆引出了极大子群的 s-完备的定义，进而得到：

命题 6 群 G 可解当且仅当对 G 可解的极大子群 M，且 M 有一个 s-完备 C，使得 $C/K(C)$ 是幂零的，且其 Sylow2-子群的幂零类 ≤ 2 。

命题 7 群 G 可解当且仅当 G 的每个合数指数且包含某一西洛子群的正规化子的极大子群 M 存在一个 s-完备 C，使得 $C/K(C)$ 幂零，且有 $G=CM$.

命题 8 群 G 超可解当且仅当 G 的每个合数指数且包含某一 Sylow 子群的正规化子的极大子群 M 存在一个 s-完备 C，使得 $C/K(C)$ 循环的，且有 $G=CM$ 。

由上面的命题可知 s-完备的引入忽略了极大子群完备的极大性。本文也利用这一方法定义了极大子群的 h-完备，从而忽略了极大子群 θ-完备的极大性，并得到了有关可解性的一些重要结论。

本文未经特别说明，G 均指有限群。

2. 极大子群的 *h*-完备

定义 1[1]设 M 是 G 的一个极大子群。G 的子群 C 称为 M 在 G 中的一个完备，如果 $C \not\subseteq M$，而 C 的每个 G-不变真子群都在 M 中。

若用 $K(C)$ 表示 C 的所有 G-不变真子群之积则 $K(C)<C$ 且 $K(C) \lhd G$，M 在 G 中的所有完备作成一个集合，记为 $I(M)$，称为 M 在 G 中的指数复合。$I(M)$ 按集合包含关系作成一个偏序集，其极大元称为 M 的极大完备。

定义 2[3]设 M 是 G 的一个极大子群。M 的一个完备 C 称为 M 在 G 中的一个 s-完备，如果 $C=G$ 或存在 G 的一个子群 D，使得 D 不是 M 的完备，但有 $C<D$ 成立。

定义 3[3]设 $H \leq G$，若存在 $K \leq G$，使 $G=HK$ 且 $H \cap K=1$，则称 H 在 G 中 是可补的.若进一步有 $K \lhd G$，则称 H 在 G 中有正规补.

定义 4[4]给定群 G，有下面定义：

$$\mathcal{F}^S(G)=\left\{M<G \middle| \exists q \in \pi(G) \text{ 使 } G_q \in Syl_q(G), N_G(G_q) \leq M\right\}$$

$$\mathcal{F}^C(G)=\left\{M<G \middle| |G:M| \text{ 为合数}\right\}$$

$$\mathcal{F}^{SC}(G)=\mathcal{F}^S(G) \cap \mathcal{F}^C(G)$$$

若 $\mathcal{F}^{SC}(G) \neq \phi$，则 $\Phi^{SC}(G)=\cap\{M: M \in \mathcal{F}^{SC}(G)\}$，否则 $\Phi^{SC}(G)=G$ 。

定义 5[5]M$是 G 的一个极大子群。G 的一个子群 C 称为 M 在 G 中的一个 θ-完备，如果 $C \not\subseteq M$，但有 $M_G \subseteq C$，且在 C/M_G 中没有 G/M_G 的非平凡正规子群。

把 M 在 G 中所有 θ-完备记作 $\theta I(M)$，其中 $M<G$。若 $C \in \theta I(M)$ 且在 $\theta I(M)$ 中没有任何元 D 满足$C<D$，则我们把 C 叫作 M 的极大 θ-完备.

群 G 的极大子群 M 的完备（θ-完备）C 称为是正规的，若 $C \lhd G$. 显然正规完备（θ-完备）一定是极大的.

下面给出 h-完备的定义.

定义 6 设 M 是 G 的一个极大子群。M 的一个 θ-完备 C 称为 M 在 G 中的

一个 h-完备，如果 $C=G$ 或存在 G 的一个子群 D，使得 D 不是 M 的 θ-完备，但有 $C<D$ 成立。

显然一个极大 θ-完备必然是一个 h-完备，反之却不一定成立.

定义 7[7]若给定群类 $\mathcal{A}$ 的子群类 $\mathcal{B}$，且用 $b(\mathcal{B})$ 表示一个群类，我们称 $b(\mathcal{B})$ 为 $\mathcal{B}$ 的 Q-边界，它表示所有群 G 的类，若 $G \in \mathcal{A}-\mathcal{B}$，而有 $G/N \in \mathcal{B}$，其中 $1 \neq N \lhd G$.

定义 8[8]群 X 称为群 Y 的一个截断，如果 X 是 Y 的一个子群的同态像.

定义 9[10]若 G 是有限群，$|G|=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$，且 $p_1<\cdots<p_s$，若存在 G 的正规群列 $G=G_0>G_1>H \cdots>G_S=1$ 使得 $|G_{i-1}/G_i|=p_i^{\alpha_i}, i=1,\cdots,s$，则称上述群列为 G 之一 Sylow 塔，而称 G 为一具有 Sylow 塔的群，简称 ST-群。

定义 10[11] F 是一个群类。称 F 为一个群系(formation)，如果

1) 若 $G \in F$，$N \lhd G$，则 $G/N \in F$；

2) 若 $N_1, N_2 \lhd G, G/N_1, G/N_2 \in F$,则 $G/(N_1 \cap N_2) \in F$ 。

称一个群系 F 为饱和（浸润）的，如果由 $G/\Phi(G) \in F$ 能 推出 $G \in F$.

显然，可解群类 S ,超可解群类 U ,幂零群类 N 都是饱和的[11]。

对一个群系 F ,每一个群 G 都存在一个最小正规子群 N 使得 $G/N \in F$ 。这个唯一确定的正规子群称为 G 的 F -剩余子群,记作 G^F .

引理 1[4]设 M 是 G 的一个极大子群，则:

$$\theta I(M) = \{C \in I(M) \mid K(C) = M_G,$$
$$\text{或 } C = AM_G,$$

其中 A 是 M 的极小正规补.

引理 2[5]设 C 是极大子群 M 的一个 θ-完备，如果有 $N \lhd G$ 且 $N \le M$ ，则 C/N 是 M/N 的一个极大 θ-完备，反之如果 C/N 是 M/N 的一个极大 θ-完备,则 C 是极大子群 M 的一个 θ-完备.

同理易证明下面引理.

引理 3 设 C 是极大子群 M 的一个 h-完备，如果有 $N \lhd G$ 且 $N \le M$,则 C/N 是 M/N 的一个 h-完备，反之如果 C/N 是 M/N 的一个 h-完备，则 C 是极大子群 M 的一个 h-完备.

引理 4 设 $\sum$ 是一个群性质且是子群遗传、同态象不变的。若 M 是 G 的一个极大子群， C 是 M 的一个 h-完备，使得 C/M_G 是一个 $\sum$ 群，则存在一子群 $D \le G$ 和一正规极大 θ-完备 $A^* = AM_G$ 。其中 A 是 M 的极小正规补，使得 $\sum$ 群 C/M_G 是 DM_G/M_G 的一个极大子群， $A^*/M_G \subseteq DM_G/M_G$ 且有 $D = AC$ 成立。

证明若 $C = G$ 时引理显然成立.

若 $C \ne G$ ，由 h-完备的定义，有 $C \in \theta I(M)$ 且存在 $D \le G, D \notin \theta I(M)$ ，而 C 是 D 的一个极大子群。故在 G 中必有一个真子群 A ，使得 $A \lhd G$ 且 $A \notin M$ ，取 A 为 D 中 M 的极小正规补,则由引理 1 得，$A^* = AM$ 是一个极大 θ-完备。

因此 $AM_G/M_G \subseteq DM_G/M_G$ ，且 C/M_G 上 D/M_G 的一个极大子群。

更进一步，由于 $A \not\subseteq K(C)$ ，故有 $C < CA \le D$ 成立。

引理 5[6]设 G 为有限群，且有一个极大子群 M 是幂零的。若 T 为 M 的唯一的 Sylow 2-子群，且 U 是 M 的唯一的 2-补，则 U 在 G 中是正规的，且有 $Z(U) \le Z(G)$ ，$G/Z(U) \cong G/U \times U/Z(U)$ ，以及 G/U 是可解的，且其 Sylow 2-子群是它的极大子群。特别地，如果 $Z(G) = 1$ ，则 M 是 G 的 Sylow 2-子群。

引理 6[7]设 G 为有限群，则 G 可解当且仅当对每一个极大子群 $M \in \mathcal{F}^{SC}(G)$ ，都存在一个极大 θ-完备 C ,使得 C/M_G 幂零,且它的 Sylow 2-子群的零类 ≤ 2.

引理 7[8]设 G 为有限群，则下列两条均为 G 可解的充要条件：

1) G 的合成因子皆为素数阶循环群；

2) G 的主因子皆为素数幂阶的初等交换群.

引理 8 (Deskins, Janko, Thompson[8]) 设 H 为 G 的极大子群。若 H 幂零，且 H 的 Sylow 2-子群的零类 ≤ 2，则 G 可解.

引理 9[9]设群 G 有唯一的极小正规子群 $\bar{K}$ 是不可解的，令 $\bar{C}$ 是 $\bar{G}$ 的幂零非正规子群，则有一面结论成立：

1) 如果 $\bar{C}$ 是 $\overline{CK}$ 的极大子群，则 $\bar{C} \cap \bar{K}$ 是 $\bar{K}$ 的 Sylow 2-子群。

2) 如果 $\bar{C}$ 是 $\bar{K}$ 的极大子群，则 $\bar{C}$ 是 $\bar{K}$ 的 Sylow 2-子群。

引理 10[9]若 $\mathcal{S}$ 为可解群区系，$b(\mathcal{S})$ 为的边界，则有下面的结论成立：

1) 若群 $G \notin \mathcal{S}$ ，则存在一个正规子群 $N \in G$ ，使得 $G/N \in b(\mathcal{S})$ 且 G/N 有唯一的极小正规子群 K/N 且其不可解。

2) 若 M/N 是 G/N 的一个无核极大子群，则有 $N = M_G$ 。

3) 若 M/N 是 G/N 的一个无核极大子群，且 M 有极大完备 C 使得 $C/K(C)$ 是可解的，则 $M_G = N = K(C)$ 。

3. 极大子群的 h-完备与群的可解性

本节主要讨论有限群的某些极大子群的 h-完备对有限群的可解性的影响.

定理 1 群 G 可解当且仅当对每一个包含在 $\mathcal{F}^{SC}(G)$ 中的极大子群 M ，都存在一个 h-完备 C ，使得 C/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2 .

证明必要性：因为 G 是可解的，由引理 7 知 G 的主因子皆是交换群。而由于集合 $W = \{C \mid C \lhd G$ ，且

$CM=G\}$ 非空，在 W 中取极小者 C，则 $C\in I(M)$ 为极大完备，故由引理 1 可取适当 $C\in W$ 使得 C 为极大 θ-完备，且 C/M_G 是 G 的一个主因子，因而 C 为一个 h-完备，且 C/M_G 为交换群，即存在一个 h-完备，使得 C/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2。

充分性：1) 若取极大子群 $M\in F^{SC}$，则 M 存在一个极大 θ-完备 A^*,使得有 A^*/M_G 是幂零的，其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2.

因为有 C/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2，且又由引理 4 可知存在一个 $D, D\le G$ 和一个极大正规 θ-完备 $A^*=AM_G$（这里 A 为 M 的在 D 中的极小正规补）使得有 $A^*/M_G\le DM_G/M_G$，$C/M_G<DM_G/M_G$。

故由引理 4 知 DM_G/M_G 可解.又由于 G/M_G 的极小正规子群 AM_G/M_G 在 DM_G/M_G 中，故 AM_G/M_G 为交换群.因此 A^*/M_G 是幂零的，其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2，即 1) 成立。

2) 由引理 6 知 G 可解。

定理 2 群 G 可解当且仅当对每一个包含在 $\mathcal{F}^{SC}(G)$ 中的极大子群 M 都存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，且 $CM=G$。

证明 必要性：因为可解，由引理 7 知 G 的主因子皆是交换群.而由于集合 $W=\{C\mid C\lhd G$，且 $CM=G\}$ 非空，在 W 中取极小者 C，则 $C\in I(M)$ 为极大完备，于是由引理 1 可取适当 $C\in W$ 使得 C 为极大 θ-完备，且 C/M_G 是 G 的一个主因子，因而 C 为一个 h-完备，且 C/M_G 为交换群，即存在一个 h-完备，使得 C/M_G 是幂零的，且 $CM=G$。

充分性：设 G 是一个极小阶反例。因为 G 是不可解的，则存在一个 G 的正规子群 N，使得 G/N 包含在可解群区系 $\mathcal{S}$ 的 Q-边界中.由于 $\mathcal{S}$ 是浸润的，故由引理 10 可知 G/N 有唯一的极小正规子群 A/N，且其是不可解，使得对任意素数 p,它都没有非平凡的正规 p-子群，即 A/N 是单群。

设 p 为 A/N 的最大的素因子，另设 P/N 是 \$A/N\$的一个 Sylow p-子群.因此 $P/N\ntrianglelefteq A/N$.由于 Franttini 论断有

$G/N=N_{G/N}(P/N)\bullet A/N=M/N\bullet A/N$。

这里 M/N 是 G/N 中包含 $G/N=N_{G/N}(P/N)$ 的一个极大子群.令 S 是 G 的 Sylow p-子群，使得 $SN/N\cap A/N=P/N$.我们注意到

$$\begin{aligned}N_G(S)N/N&=N_{G/N}(SN/N)\\&\le N_{G/N}(P/N)\le M/N.\end{aligned}$$

因此有：$N_G(S)\le M$，故 $M\in\mathcal{F}^S(G)$。我们断言 $M\in\mathcal{F}^C(G)$。事实上，假定 $|G:M|=q$，其中 q 为素数，则 $G/N\cong S_q$ 的一个子群（由 N/C 定理），S_q 是 q 个文字上的对称群，因此 q 是 G/N 的最大素因子.另一方面，又由

$|G/N:M/N|=q=|A/N:M/N\cap A/N|$，故有 $p=q$，而这与 M/N 和 A/N 都包含 Sylow p-子群 P/N 矛盾.故 $M\in\mathcal{F}^C$.因此有：$M\in\mathcal{F}^{SC}(G)$.

因 A/N 是 G/N 的唯一极小正规子群，且 $G/N=A/N\cdot M/N$，由引理 10 我们有 $N=M_G$。因此有：$A^*=AM_G$ 是 M 的正规极大 θ-完备.并且根据假设，M 有一个 h-完备 C 使得 C/M_G 是幂零的，且 $CM=G$。由引理 4 知 G 有一个子群 D 使得幂零子群 C/M_G 是 DM_G/M_G 的极大子群，且 $A/M_G\subseteq DM_G/M_G$。因为 A/M_G 是 G/N 的唯一的极小正规子群，由引理 5，因 $Z(DM_G/M_G)=1$ 知 C/M_G 是 DM_G/M_G 的 Sylow 2-子群.令 $B=C\cap A$，则 B/M_G 是 A/M_G 的 Sylow 2-子群.这样由于 A/M_G 是不可解的，且没有非平凡的正规 2-子群，因此 B/M_G 在 A/M_G 中是非平凡的、不正规的.由 Frattini 论断有：

$$G/M_G=N_{G/M_G}(B/M_G)\cdot A/M_G=H/M_G\cdot A/M_G$$

其中 H 是 G 的一个极大子群，且 H/M_G 包含 $N_{G/M_G}(B/M_G)$。假设 S 是 G 的 Sylow 2-子群，使得 $SM_G/M_G\cap A/M_G=B/M_G$ 于是我们有 $N_G(S)\subseteq H$ 和 $H\in\mathcal{F}^S(G)$。

更进一步，由于 B/M_G 包含在 H/M_G 中，则 $|G:H|=|A/M_G:A/M_G\cap H/M_G|$ 一定是奇数。而另一方面，由于因为 C/M_G 正规化 B/M_G，且 $C/M_G<DM_G/M_G$ 以及 $DM_G\not\subseteq H/M_G$，则有：$C/M_G=DM_G/M_G\cap H/M_G$.故 $DM_G/M_G\cap H/M_G$ 是 2-群。

因此，

$|G:H|=|DM_G/M_G:DM_G/M_G\cap H/M_G|$ 一定是合数.否则有：$|DM_G/M_G|=2^\alpha\cdot r$，其中 r 为一素数，故 DM_G/M_G 是可解的，而这与 A/M_G 不可解矛盾。

于是有 $H\in\mathcal{F}^{SC}(G)$.因此由定理假设知存在一个

h-完备 C^* 使得 C^*/H_G 是幂零的，且 $C^*H=G$。同 M 的讨论一样我们有 C^*M_G/M_G 是 2-群，又因为 $G/M_G=C^*M_G/M_G\cdot H/M_G$，有：$|G:H|=|C^*M_G/M_G:H/M_G\cap C^*M_G/M_G|$ 是 2 的方幂，这与前面得到的 G/H 为奇数矛盾.故 G 可解。

定理 3 群 G 可解当且仅当对每一个包含在 $\mathcal{F}^{SC}(G)$ 中的极大子群 M 都存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，并且有 $C^g\not\subseteq M$，对一切 $g\in G$ 成立。

为了证明这个定理，我们首先给出下面定理。

定理 4[15]群 $\Phi^{SC}(G)$ 为可解群。

下面我们给出定理 3 的证明

必要性：证明同定理 2。

充分性：极小反例法。若 G 是非交换单群，则对任意的 M，$M<G$，有 G 本身就是 M 的一个 h-完备，而 M 在 G 中有核，即 $M_G=1$，故 G 幂零，矛盾.定理成立。

若 G 不是非交换单群，由引理 10 知存在着一个 N，$N\lhd G$，使有 $\bar{G}=G/N\in b(\mathcal{S})$（所有可解群类的 Q-边界），因此 $\bar{G}$ 有唯一的极小正规子群 $\bar{K}$，并且其不可解。

为了方便，我们分以下几步证明：

1) G 存在一个极大子群 $\bar{M}$，使得 $\bar{M}\in\mathcal{F}^{SC}(G)$，且 $\bar{M}$ 有一个 h-完备 $\bar{C}$，且其性质类似于 M 的 h-完备 C。

由引理 2 知定理假设对 G 是成立的，且由定理 4 知 $\Phi^{SC}(\bar{G})$ 是可解的，则 $\bar{K}\not\subseteq\Phi^{SC}(\bar{G})$，因此存在一个极大子群 $\bar{M}\in\mathcal{F}^{SC}(G)$ 使 $\bar{K}\notin\bar{M}$。故有 $\bar{G}=\overline{MK}$ 且 $\bar{M}$ 是无核的，因此也有 $M\in\mathcal{F}^{SC}(G)$，由定理假设知 M 存在一个 h-完备 C 使得 C/M_G 是幂零的，并且有 $C^g\not\subseteq M$，对一切 $g\in G$ 成立.又由引理 10 知 $M_G=N$。故由引理 3 可得 $\bar{C}=C/N$ 是 $\bar{M}$ 的一个 h-完备且 $\bar{C}$ 有类似 C 的性质。

2) $\mathcal{F}^{SC}(\bar{G})$ 中每一个极大子群 $\bar{H}$，其 h-完备 $\bar{C}$ 都可使 $\bar{C}\cap\bar{K}$ 是 $\bar{K}$ 的 Sylow 2-子群。

由于 $\bar{C}$ 是 $\bar{H}$ 的 h-完备，以及 $\bar{K}$ 是 $\bar{G}$ 唯一的极小正规了群，因此 $\bar{G}$ 中存在一个子群 $\bar{D}$，且 $\bar{C}<\bar{D}$，使有：$\bar{K}\subseteq\bar{D}$ 又因为 $\bar{K}\not\subseteq\bar{C}$，且 $\bar{C}$ 在 $\bar{G}$ 中是非正规的，故 $\bar{C}<\overline{CK}<\bar{D}$，于是 $\overline{CK}=\bar{D}$ 成立.因此有：$\bar{C}<\overline{CK}$ 故由引理 9 可知 $\bar{C}\cap\bar{K}$ 是 $\bar{K}$ 的 Sylow 2-子群。

3) $\bar{G}$ 存在一个无核的极大子群 $\bar{L}$，且 $\bar{C}\subseteq\bar{L}$，使得 $\bar{L}\in\mathcal{F}^{SC}(G)$。由 2) 知可取 $\bar{S}=\bar{C}\cap\bar{K}$ 是 $\bar{K}$ 的 Sylow 2-子群，设 $\overline{G_2}$ 是 $\bar{G}$ 的 Sylow 2-子群，且使 $\overline{G_2}\cap\bar{K}=\bar{S}$。于是有：$N_{\bar{G}}(\overline{G_2})\subseteq N_{\bar{G}}(\bar{S})\subseteq\bar{L}\subset\bar{G}$，其中 $\bar{L}$ 是 $\bar{G}$ 的某一个极大子群，显然 $\bar{C}\subseteq\bar{L}$，由 Frattini 论断有：$\bar{G}=N_{\bar{G}}(\bar{S})\cdot\bar{K}=\overline{LK}$。因此 $\bar{L}\in\mathcal{F}^{S}(\bar{G})$，且 $\bar{L}_{\bar{G}}=1$。我们断言 $|\bar{G}:\bar{L}|$ 一定是合数.否则，若 $|\bar{G}:\bar{L}|=r$，r 为一素数，由于 $|\bar{G}:\bar{L}|=|\bar{D}:\bar{D}\cap\bar{L}|=r$。又因为 $\bar{C}\subseteq\bar{D}\cap\bar{L}$ 以及 $\bar{C}<\bar{D}$，则有 $\bar{C}=\bar{D}\cap\bar{L}$。因此 $|\bar{K}|=|\bar{D}:\bar{K}|\cdot r=2^{\alpha}\cdot r$，即 $\bar{K}$ 可解，矛盾.因此有 $\bar{L}\in\mathcal{F}^{SC}(G)$。

4) 导出结论

因为 $\bar{L}\in\mathcal{F}^{SC}(\bar{G})$ 由定理假设及引理 3 知存在一个 h-完备 $\overline{C^*}$，使 $\overline{C^*}$ 是幂零的，且有 $\overline{C^*}^{\bar{g}}\not\subseteq\bar{L}$，对一切 $\bar{G}\in\bar{G}$ 成立。由(II)知 $\overline{C^*}\cap\bar{K}$ 与 $\bar{S}=\bar{C}\cap\bar{K}$ 相同是 $\bar{K}$ 的 Sylow 2-子群，所以，$\bar{S}=\overline{C^*}^{\bar{g}}\cap\bar{K}$ 对一切 $\bar{G}\in\bar{G}$。因此若令 $\bar{U}=\left\langle\bar{C},\overline{C^*}\right\rangle$，则 $\bar{U}$ 正规化 $\bar{S}$，如果 $\bar{C}<\bar{U}$，则 $\bar{G}$ 的唯一的极小正规子群 $\bar{k}$ 包含在 $\bar{U}$ 中，因此 $\bar{C}$ 是 $\bar{M}$ 的 h-完备，故 $\bar{K}$ 正规化 $\bar{S}$，矛盾于是我们有 $\bar{C}=\bar{U}$，则 $\overline{C^*}^{\bar{g}}\subseteq\bar{C}\subseteq N_{\bar{G}}(\bar{S})\subseteq\bar{L}$，与假设矛盾。因此定理成立。

以上我们主要讨论了极大子群 $M\in\mathcal{F}^{SC}(G)$ 对群的可解性的影响，而事实上可解的极大子群类和幂零的极大子群类对群的可解性也有一定的联系。以下我开始讨论这两个群类对群可解性的影响。

定理 5 群 G 可解当且仅当 G 存在一个可解的极大子群 M，且 M 存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2 子群的幂零类 ≤ 2.

证明 必要性：因为 G 是可解的，由引理 7 知 G 的主因子皆是交换群.而由于集合 $W=\{C\,|\,C\lhd G$，且 $CM=G\}$ 非空，在 W 中取极小者 C，则 $C\in I(M)$ 为极大完备，故由引理 1 可取适当 $C\in W$ 使得 C 为极大 θ-完备，且 C/M_G 是 G 的一个主因子，因而 C 为一个 h-完备，且 C/M_G 为交换群，即存在一个 h-完备，使得 C/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2。

充分性：极小反例法。若 G 是非交换单群，则对任意的 M，$M<G$，有 G 本身就是 M 的一个 h-完备，而 M 在 G 中有核，即 $M_G=1$，故 G 幂零，矛盾定理成立。

若 G 不是非交换单群，我们首先证明极大子群 M 存在一个 h-完备 A^*，使得有 A^*/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2。因为有 C/M_G 是幂零 的，且其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2，且又由引理 4 可知存在一个 D，$D \le G$ 和一个极大正规 θ-完备 $A^* = AM_G$（这里 A 为 M 的在 D 中的极小正规补）使得有 $A^*/M_G \le DM_G/M_G, C/M_G < DM_G/M_G$。故由引理 8 知 DM_G/M_G 可解，又由于 G/M_G 的极小正规子群 AM_G/M_G 在 DM_G/M_G 中，故 AM_G/M_G 为交换群.因此 A^*/M_G 是幂零的，其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2。

当 $M_G \ne 1$ 时，设 N 是 G 的极小正规子群且 $N \le M$，则由引理 3 知 $A^*/N \in hI(M/N)$。又由 $M/N < G/N$，故由命题假设可知 G/N 可解，N 也可解，于是 G 可解。矛盾，定理成立。当 $M_G = 1$ 时，则可设 N 是 G 的唯一极小正规子群。因此 $G = MN$，于是 G/N 可解.令 H 是 G 的一个适当子群，使其包含 A^*，且 $A^* < H$。而由于 A^* 是 $\theta I(M)$ 中的极大元，故有：$N \le H$ 根据引理 8 得 H 是可解的，于是 N 可解，即 G 可解。矛盾，定理成立。

推论 1 群 G 可解当且仅当 G 存在一个幂零的极大子群 M，且 M 存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2 子群的幂零类 ≤ 2。

定理 6 群 G 可解当且仅当 G 存在一个可解的极大子群 M，且 M 存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，并且有 $C^g \not\subseteq M$，对一切 $g \in G$ 成立。

证明必要性：证明同定理 5。

充分性：极小反例法。若 G 是非交换单群，则对任意的 M，$M < G$，有 G 本身就是 M 的一个 h-完备，而 M 在 G 中有核，即 $M_G = 1$，故 G 幂零，矛盾.定理成立。

若 G 不是非交换单群，由引理 10 知存在一个 N，$N \lhd G$，使有 $\bar{G} = G/N \in b(\mathcal{S})$（所有可解群类的 Q-边界），因此 G 有唯一的极小正规子群 $\bar{K}$，并且其不可解。

我们按以下几步证明：

1) 对于 $\bar{G}$ 中的一个可解极大子群 $\bar{M}$，$\bar{M}$ 有一个 h-完备，其性质类似于 $\bar{M}$ 的 h-完备 C .

由引理 2 知定理假设对 $\bar{G}$ 是成立的，而 $\bar{M}$ 是可解的，则 $\bar{K} \not\subseteq \bar{M}$，故有 $\bar{G} = \overline{MK}$ 且 $\bar{M}$ 是无核的，否则矛盾于 $\bar{K}$ 是 $\bar{G}$ 的唯一极小正规子群。又由引理 10 知 $M_G = N$。而 M 存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，并且有 $C^g \not\subseteq M$，对一切 $g \in G$ 成立。故由引理可得 $\bar{C} = C/N$ 是 $\bar{M}$ 的一个 h-完备且 C 有类似于 C 的性质。

2) $\bar{G}$ 中每一个无核的极大子群 $\bar{H}$，其 h-完备 $\bar{C}$ 都可使 $\bar{C} \cap \bar{K}$ 是 $\bar{K}$ 的 Sylow 2-子群。

由于 $\bar{C}$ 是 $\bar{H}$ 的 h-完备，以及 $\bar{K}$ 是 $\bar{G}$ 唯一的极小正规子群，因此 $\bar{G}$ 中存在一个子群 $\bar{D}$，且 $\bar{C} < \bar{D}$，使有：$\bar{K} \subseteq \bar{D}$。又因为 $\bar{K} \not\subseteq \bar{C}$，且 $\bar{C}$ 在 $\bar{G}$ 中是非正规的，故 $\bar{C} < \overline{CK} \le \bar{D}$，于是 $\overline{CK} = \bar{D}$ 成立。因此有：$\bar{C} < \overline{CK}$。故由引理 9 知 $\bar{C} \cap \bar{K}$ 是 $\bar{k}$ 的 Sylow 2-子群。

3) $\bar{G}$ 中存在一个无核的极大子群 $\bar{L}$，且 $\bar{C} \subseteq \bar{L}$。

由 2)知可取 $\bar{S} = \bar{C} \cap \bar{K}$ 是 $\bar{K}$ 的 Sylow 2-子群，设 $\overline{G_2}$ 是 $\bar{G}$ 的 Sylow 2-子群，且使 $\overline{G_2} \cap \bar{K} = \bar{S}$。于是有：$N_{\bar{G}}(\overline{G_2}) \subseteq N_{\bar{G}}(\bar{S}) \subseteq \bar{L} \subset \bar{G}$ 其中 $\bar{L}$ 是 $\bar{G}$ 的一个包含 $N_{\bar{G}}(\bar{S})$ 的极大子群，显然 $\bar{C} \subseteq \bar{L}$，由 Frattini 论断有：$\bar{G} = N_{\bar{G}}(\bar{S}) \cdot \bar{K} = \overline{LK}$ 因此 $\bar{L}_{\bar{G}=1}$。

4) 导出结论

因为 $\bar{L} < \bar{G}$，故 $\bar{L}$ 可解。由定理假设及引理 3 知存在一个 h-完备 $\overline{C^*}$，使 $\overline{C^*}$ 是幂零的，且有 $\bar{C}^{\bar{g}} \not\subseteq \bar{L}$，对一切 $\bar{g} \in \bar{G}$ 成立。由 2) 知 $\overline{C^*} \cap \bar{K}$ 与 $\bar{S} = \bar{C} \cap \bar{K}$ 相同是 $\bar{K}$ 的 Sylow 2-子群，所以 $\bar{S} = \bar{C}^{\bar{g}} \cap \bar{K}$，对一切 $\bar{g} \in \bar{G}$。因此若令 $\bar{U} = \left\langle \bar{C}, \overline{C^*} \right\rangle$，则 $\bar{U}$ 正规化 $\bar{S}$，如果 $\bar{C} < \bar{U}$，则 $\bar{G}$ 的唯一的极小正规子群 $\bar{K}$ 包含在 $\bar{U}$ 中，因此 $\bar{C}$ 是 $\bar{M}$ 的 h-完备，故 $\bar{K}$ 正规化 $\bar{S}$，矛盾于是我们有 $\bar{C} = \bar{U}$，则 $\overline{C^*}^{\bar{g}} \subseteq \bar{C} \subseteq N_{\bar{G}}(\bar{S}) \subseteq \bar{L}$，与假设矛盾。因此定理成立。

推论 2 群 G 可解当且仅当 G 存在一个幂零的极大子群 M，且 M 存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，并且有 $C^g \not\subseteq M$，对一切 $g \in G$ 成立。

定理 7 群 G 可解当且仅当 G 存在一个可解的极大子群 M，且 M 存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，且有 $G = CM$。

证明必要性：证明同定理 5。

充分性：由定理 7 知我们只须证明：若定理假设成立可导出 $C^g \not\subseteq M$，对一切 $g \in G$ 成立即可。事实上，否则若有某一 $g \in G$ 使得 $C \subseteq M^g$，若令 $g = mc$，其中 $m \in M$，$c \in C$，则 $c \in M^c$，故 $M^c = M$。而 $M^c = M$，因此 $C \subseteq M$，矛盾，故定理成立。

推论 3 群 G 可解当且仅当 G 存在一个幂零的极大子群 M，且 M 存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，且有 $G=CM$。

定理 8 群 G 可解当且仅当对于每个包含 G 的某个 Sylow 2-子群的正规化子的极大子群 M，且 M 存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2 子群的幂零类 ≤ 2。

证明必要性；因为 G 是可解的，由引理 7 知 G 的主因子皆是交换群。而由于集合 $W=\{C \mid C \lhd G$，且 $CM=G\}$ 非空，在 W 中取极小者 C，则 $C\in I(M)$ 为极大完备，故由引理 1.2.1 可取适当 $C\in W$ 使得 C 为极大 θ-完备，且 C/M_G 是 G 的一个主因子，因而 C 为一个 h-完备，且 C/M_G 为交换群，即存在一个 h-完备，使得 C/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2。

充分性：极小反例法。若 G 是非交换单群，则对任意的 M，$M<G$，有 G 本身就是 M 的一个 h-完备，而 M 在 G 中有核，即 $M_G=1$，故 G 幂零，矛盾定理成立。若 G 不是非交换单群，我们首先证明极大子群 M 存在一个 h-完备 A^*，使得有 A^*/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2。因为有 C/M_G 是幂零的，且其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2，且又由引理 4 可知存在一个 D，$D\leq G$ 和一个极大正规 θ-完备 $A^*=AM_G$（这里 A 为 M 的在 D 中的极小正规补）使得有 $A^*/M_G\leq DM_G/M_G, C/M_G<DM_G/M_G$。故由引理 8 知 DM_G/M_G 可解，又由于 G/M_G 的极小正规子群 AM_G/M_G 在 DM_G/M_G 中，故 AM_G/M_G 为交换群.因此 A^*/M_G 是幂零的，其 Sylow 2-子群的幂零类 ≤ 2。

当 $M_G\neq 1$ 时，设 N 是 G 的极小正规子群且 $N\leq M$，则由引理 3 知 $A^*/N\in hI(M/N)$。又由 $M/N<G/N$，故由命题假设可知 G/N 可解，N 也可解，于是 G 可解。矛盾，定理成立。当 $M_G=1$ 时，则可设 N 是 G 的唯一极小正规子群.因此 $G=MN$，于是 G/N 可解。令 H 是 G 的一个适当子群，使其包含 A^*，且 $A^*<H$。而由于 A^* 是 $\theta I(M)$ 中的极大元，故有：$N\leq H$ 根据引理 8 得 H 是可解的，于是 N 可解，即 G 可解。矛盾，定理成立。

定理 9 群 G 可解当且仅当对于每个包含 G 的某个 Sylow 2-子群的正规化子的极大子群 M，且 M 存在一个 h-完备 C，使得 C/M_G 是幂零的，且有 $G=CM$。

证明必要性：因为 G 可解，由引理 7 知 G 的主因子皆是交换群.而由于集合 $W=\{C \mid C\lhd G$，且 $CM=G\}$ 非空，在 W 中取极小者 C，则 $C\in I(M)$ 为极大完备，于是由引理可取适当 $C\in W$ 使得 C 为极大 θ-完备，且 C/M_G 是 G 的一个主因子，因而 C 为一个 h-完备，且 C/M_G 为交换群，即存在一个 h-完备，使得 C/M_G 是幂零的，且 $CM=G$。

充分性：设 G 是一个极小阶反例。因为 G 是不可解的，则存在一个 G 的正规子群 N，使得 G/N 包含在可解群区系 $\mathcal{S}$ 的 Q-边界中。由于 $\mathcal{S}$ 是浸润的，故由引理 10 可知 G/N 有唯一的极小正规子群 A/N，且其是不可解，使得对任意素数 p,它都没有非平凡的正规 p-子群，即 A/N 是单群。

显然 2 是 A/N 的阶的一个素因子。假设 A/N 是 P/N 的一个 Sylow 2-子群，则 P/N 在 A/N 中是非正规的，且由 Frattini 论断有：

$$G/N=N_{G/N}(P/N)\cdot A/N=M/N\cdot A/N$$

（这里 M/N 是 G/N 中包含 $N_{G/N}(P/N)$ 的一个极大子群）。

设 S 是 G 的一个 Sylow 2-子群，使得 $(SN/N)\cap(A/N=P/N)$。于是我们有：

$$N_G(S)N/N=N_{G/N}(SN/N)\leq N_{G/N}(P/N)\leq M/N$$

因此 $N_G(S)\subseteq M$。注意到 $G/N=M/N\cdot A/N$ 且 A/N 是 C 的唯一极小正规子群，于是可知 $N=M_G$ 及 $A=AM_G$。由归纳假设，M 有一个 h-完备使得 C/M_G 是幂零的且 $CM=G$.

然而，因为 A 是正规的，因此极大完备和 A/N 是可解的，于是我们由引理 4 知在 G 中存在一个子群 D，使得幂零子群 C/N 在 DN/N 中是极大的，并且 G/N 的唯一极小正规子群 A/N 在 DN/N 中.

设 T/N 是 C/N 的 Sylow 2-子群且 U/N 是 C/N 的 2 补，则由引理 1.2.9 可得 $Z(U/N)$ 在 $Z(DN/N)$ 中。如果 U/N 是非平凡的，则 $Z(U/N)$ 也是非平凡的，故 $Z(DN/N)$ 是非平凡的.又由于

$$Z(DN/N)\subseteq C_{DN/N}(A/N)\subseteq C_{G/N}(A/N)$$

我们有：$A/N\subseteq C_{G/N}(A/N)$，因此 A/N 是交换的，矛盾.故 U/N 是平凡的，于是 C/N 必是 DN/N 的一个 Sylow 2-子群。

记 $B=C\cap A$，则 B/N 是 A/N 的 Sylow 2-子群，

因此在 A/N 中是非平凡的、非正规的。由 Frattini 论断知，

$$G/N = N_{G/N}(B/N)\cdot A/N = H/N\cdot A/N$$

这里 H 是 G 的极大子群且 $H/N \subseteq N_{G/N}(B/N)$。设 F 是 G 的一个 Sylow 2-子群，使得 $FN/N \cap A/N = B/N$。则 $N_G(F) \subseteq H$，且由于 $B/N \subseteq H/N$，故

$$|G:H| = |A/N : A/N \cap H/N|$$

必是个素数。又由归纳假设可知 H 存在一个 h-完备 C^* 使得 C^*/H_G 是幂零的，且 $G = C^*H$。同 M 的方法可证 C^*/N 是 2 群。

另一方面由于 $G/N = C^*/N\cdot H/N$，所以我们有：$|G:H| = |C^*/N : (H/N)\cap(C^*/N)|$ 是 2 的方幂，矛盾.于是 G 可解。

定理成立.

4. 结束语

有限群极大子群对有限群的可解性均要求比较强，即要求它们的“极大性”的存在，这对于群的研究稍有不便。本文通过给出极大子群的 h-完备的定义消弱了极大子群 θ-完备的极大性，并得到了有关可解性的一些重要结论。

参考文献 (References)

[1] Deskin W.E.,On maximal subgroups [J], Proc. Sympos. Pure Math. (Amer. Math. Soc), 1959: 100-104.

[2] Mukherjee N.P., Bhattachary P., On theta pairs for maximal subgroups [J], Pure Math. (Amer. Math. Soc), 1990: 589-596.

[3] Li S.R., Zhao Y.Q., On s-completions for maximal subgroups (to appear).

[4] Zhao Y.Q., On the Deskins completions, theta completions for maximal subgroups [J] Comm. Algebra, 2000, 28: 375-385.

[5] Zhao Y.Q., On the Deskins completions, theta completions and theta pairs for maximal subgroups. Comm. Algebra [J], 1998, 26: 3141-3153.

[6] Rose J.S., On finite in solute groups with nipotent maximal subgroups [J], J. of Algebra, 1977, 48, 182-196.

[7] Zhao Y.Q., On theta completions & s-completions for maximal subgroups [J]. JP Jour. Algebra, Number Theory and Appl, 2002, 2: 111-119.

[8] 徐明耀,有限群导引[M], 北京：科学出版社.

[9] Zhao Y.Q., Completion, Theta-completion and the salvability of finite groups [J], J. of Applied Algebra and Discrete Structures, 2003, 1, 87-97.

[10] Hawkes, T., On the class of Sylow Tower groups [J], Math. Z, 1968, 105: 393-398.

[11] Huppert B., Endliche G.I. Finite groups [M], Berlin: Springer-Verlag, 1968.

[12] Derk K., Hawkes T., Finite Soluble Groups[M], Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992.

[13] Li S.R., The deskins index completion and surpersolvalbility of finite groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 1999, 144: 297-302.

[14] 胡佩特，有限群论(黄建华,李慧陵译)[M],福建人民出版社, 1992.

[15] Wang Y.M., C-normality of groups and properties[J], J. of Agebra,1996, 180: 945-965.

