文章编号:1001-7402(2015)04-0146-07

序信息系统下变精度与程度的“逻辑与”粗糙集*

余建航[1],徐伟华[1,2]

(1. 重庆理工大学 数学与统计学院,重庆 400054;
2. 南京理工大学 高维信息智能感知与系统教育部重点实验室,江苏 南京 210094)

摘　要:在序信息系统中通过“逻辑与”将变精度粗糙集与程度粗糙集融合起来,建立一种新的粗糙集模型,对模型区域做出了精确的刻画,而后深入的研究了其数学性质,文末通过学生成绩这一案例进行分析体现本文的研究意义。序信息系统下变精度与程度的“逻辑与”粗糙集是对经典粗糙集理论的延伸和推广,为序信息系统的知识发现提供了新的理论基础。

关键词:逻辑与;粗糙集理论;变精度粗糙集;程度粗糙集;序信息系统
中图分类号:O159　　文献标识码:A

1　引言

粗糙集理论是一种研究不确定性的数学理论,由波兰数学家 Pawlak 于 1982 年提出[4]。该理论将人的智能体现在对事物、行为、感知等的分类能力上,而不确定性正好可以归属到边界域里。通过理论研究以及工程应用发现,传统的粗糙集理论存在明显的不足,基于等价关系的粗糙集以及需要满足的包含关系都过于严格,与此同时往往还忽略掉了类与集合重叠部分的量化信息。而变精度粗糙集[8-9,12]和程度粗糙集[5,10-11]分别从信息的相对量化和信息的绝对量化入手对粗糙集进行了改进。近年来,关于变精度粗糙集与程度粗糙集结合的研究已经取得诸多成果[13-14],此前作者也进行了序信息系统中关于“逻辑或”的粗糙集的讨论[7]。而“逻辑与”与其关系最为密切,那么如果通过“逻辑与”建立新的模型,能否和“逻辑或”所建立的模型保持一定联系,又是否具备一些相关的特殊性质,在实际应用中,又如何将变精度与程度同时在一个模型中加以讨论,比如在某次选举活动中,根据规则不仅要求支持率

超过一个给定的值 β,而且还需要满足最多只有 k 个人反对他方才可以当选,现实中亦有

诸多类似的应用。为此,本文将变精度粗糙集与程度粗糙集这两种各具优点的粗糙集通过“逻辑与”的方式结合起来,引入到序信息系统[2-3,6]中来研究,在建立新的模型的同时,还深入的研究了其数学性质,而后通过对实际案例的分析展现本文的价值。

2　预备知识

本节简要介绍粗糙集理论的相关基本知识,为讨论序信息系统下变精度与程度的“逻辑与”粗糙集

* 收稿日期:2014-05-22;修订日期:2015-03-31
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61105041;61472463;61402064);重庆市自然科学基金资助项目(cstc2013jcyjA40051);南京理工大学高维信息智能感知与系统教育部重点实验室基金资助项目(30920140122006);重庆理工大学研究生创新基金资助项目(YCX2014236)
作者简介:余建航(1991-),男,重庆理工大学数学与统计学院研究生,研究方向:人工智能的数学基础;徐伟华(通讯作者)(1979-),男,教授,研究方向:粗糙集理论与应用,不确定性推理。

提供理论基础。

2.1　程度粗糙集[10]

设(U,R)为近似空间$X\subseteq U$，$k\in N$为自然数，那么集合

$$\overline{R_k}X=\bigcup\{[x]_R\mid|[x]_R\cap X|>k\}$$

$$\underline{R_k}X=\bigcup\{[x]_R\mid|[x]_R|-|[x]_R\cap X|\leqslant k\}$$

分别称为X的程度为k的R上、下近似集。若$\overline{R_k}X\neq\underline{R_k}X$，称$X$在程度为$k$时是$R$粗糙的，否则称为是$R$精确的。其中$\overline{R_k}X$是“属于$X$的元素个数多于$k$个等价类”的并集，$\underline{R_k}X$是“最多只有$k$个元素不属于$X$的等价类”的集合，需要指出的是程度粗糙集中$\underline{R_k}X\subseteq\overline{R_k}X$并非一定成立。

2.2　变精度粗糙集[8,10]

设(U,R)为近似空间$X\subseteq U$，$c([x]_R,X)=1-\dfrac{|[x]_R\cap X|}{|[x]_R|}$称为等价类$[x]_R$关于集合$X$的错误分分类率。设$\beta$为 0 到 1 的实数，称为可调错误分类水平，$1-\beta$称为可变精度，那么集合：

$$\overline{R_\beta}X=\bigcup\{[x]_R\mid c([x]_R,X)<1-\beta\}$$

$$\underline{R_\beta}X=\bigcup\{[x]_R\mid c([x]_R,X)\leqslant\beta\}$$

分别称为X的精度为$1-\beta$的R上、下近似集。若$\overline{R_\beta}X\neq\underline{R_\beta}X$，则称$X$在精度$1-\beta$下是$R$粗糙的，否则称$X$是$R$精确的。而$\overline{R_\beta}X$是“关于$X$的错误分类率小于$1-\beta$的等价类”的并集，$\underline{R_\beta}X$是“关于$X$的错误分类率不大于于$\beta$的等价类”并集。在变精度粗糙集模型中参数$\beta$的取值范围一般在$[0,0.5)$，有学者将参数$\beta$的取值范围限定在$(0.5,1]$用以表示正确分类率[1]。需要指出的是当$\beta>0.5$时$\underline{R_\beta}X\subseteq\overline{R_\beta}X$已不成立，但是，由于程度粗糙集与变精度粗糙集，存在如下转化关系：$c([x]_R,X)<1-\beta\Leftrightarrow|[x]_R\cap X|>\beta|[x]_R|$和$c([x]_R,X)\leqslant\beta\Leftrightarrow|[x]_R\cap X|\geqslant|[x]_R|-\beta|[x]_R|$，而$k$只需满足$k\geqslant 0$且$\underline{R_k}X\subseteq\overline{R_k}X$并非一直成立。所以基于参数$\beta$的完备性和两种模型结合时能够保持一致，本文将参数$\beta$的范围取为$[0,1]$，讨论发现$\beta\in(0.5,1]$和$\beta\in[0,0.5)$两种情况具有很强的对称性，因此本文主要讨论$\beta\in[0,0.5)$，而另一部分可以类似的得到。

2.3　序信息系统[6]

设$S=(U,A,V,F)$为信息系统，其中$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为非空有限对象集，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$为属性集，$F=\{f\mid U\rightarrow V_{a_i},a\in A\}$是$U$与$A$之间的关系集，$V_a$为$a$的有限值域。对给定信息系统$S$，如果属性$a\in A$的值域上有偏序关系“$\geqslant_a$”称$a$为一个准则。$\forall x,y\in U$，$x\geqslant_a y$表示$x$至少和$y$在准则$a$下是一样好的，$x\geqslant_a y\Leftrightarrow f(x,a)\geqslant_a f(y,a)$对于属性集$B\subseteq A$，$x\geqslant_B y$表示$x$关于$B$中的所有准则都优于$y$，当信息系统$S$中所有的属性都为准则时，称该信息系统称为一个序信息系统，通常简记为：$S^{\geqslant}=(U,A,f)$。

3　序信息系统下变精度与程度“逻辑与”粗糙集

前文介绍了程度粗糙集、变精度粗糙集和序信息系统的相关知识，有了这些基本概念作为基础，现在我们需要在序信息系统下通过“逻辑与”将变精度粗糙集与程度粗糙集结合起来，并深入的讨论其性质。

定义 3.1　设$S^{\geqslant}=(U,A,f)$为序信息系统，$\forall X\subseteq U$，$R^{\geqslant}$为$S^{\geqslant}$中的优势关系那么：

$$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X=\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid c([x]_R^{\geqslant},X)<1-\beta,|[x]_R^{\geqslant}\cap X|>k\}$$

$$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X=\bigcup\{[x]_R^{\geqslant}\mid c([x]_R^{\geqslant},X)\leqslant\beta,|[x]_R^{\geqslant}|-|[x]_R^{\geqslant}\cap X|\leqslant k\}$$

分别称为X在序信息系统下的精度为$1-\beta$程度为k的“逻辑与”$R^{\geqslant}$上近似集、下近似集，如果$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\neq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$，则称$X$在序信息系统下依精度$1-\beta$与程度$k$的“逻辑与“粗糙，反之则称为$R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}$精确的或

$R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}$ 可描述的。其他的粗糙集区域：

$$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X = \overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X \cap \underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$$
$$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X = \sim(\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X \cup \underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X)$$
$$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X = \overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X - \underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$$
$$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X = \underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X - \overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$$
$$bnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X = UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X \cup LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X = \overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X \Delta \underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$$

分别称为正域、负域、上边界域、下边界域和边界域，其中 Δ 为集合的对称差运算。前文提到，程度粗糙集中 $\underline{R_k}X \subseteq \overline{R_k}X$ 并非恒成立，所以 $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X \subseteq \overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$ 也并不是一直成立，所以本文分别定义了上、下边界域，而边界域则以上、下近似集的对称差的方式定义。

定理 3.1 设 $S^{\geqslant}=(U,A,f)$ 为序信息系统，$\forall X\subseteq U$，$\beta\in[0,1]$，$k\in N$，$R^{\geqslant}$ 为 $S^{\geqslant}$ 上的优势关系，则有：

(1) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X = \overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X \cap \overline{R^{\geqslant}_{k}}X$，

(2) $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X = \overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X \cap \underline{R^{\geqslant}_{k}}X$.

证明 (1) $\forall x\in \overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$ 则有 $c([x]^{\geqslant}_R,X)<1-\beta$，$|[x]^{\geqslant}_R\cap X|>k$，即是 $x\in\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X$ 且 $x\in\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$，故 $x\in\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$. 又 $\forall x\in\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$，有 $x\in\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X$ 且 $x\in\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$，即是 $c([x]^{\geqslant}_R,X)<1-\beta$ 且 $|[x]^{\geqslant}_R\cap X|>k$，故 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$. 综上可得 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X=\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$.

(2)证明方法与(1)类似。

定理 3.2 设 $S^{\geqslant}=(U,A,f)$ 为序信息系统，$\forall X\subseteq U$，$\beta\in[0,1]$，$k\in N$，$R^{\geqslant}$ 为 $S^{\geqslant}$ 中的优势关系，则有：$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X = posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X\cup UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X = posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X\cup LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X$.

证明 由定义可以直接得到。

定理 3.3 设 $S^{\geqslant}=(U,A,f)$ 为序信息系统，$\forall X\subseteq U$，$\beta\in[0,1]$，$k\in N$，$R^{\geqslant}$ 为 $S^{\geqslant}$ 中的优势关系有：

(1) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R \mid |[x]^{\geqslant}_R\cap X|>\max(k,\beta|[x]^{\geqslant}_R|)\}$；

(2) $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R \mid |[x]^{\geqslant}_R\cap X|\geqslant\max(|[x]^{\geqslant}_R|-k,|[x]^{\geqslant}_R|-\beta|[x]^{\geqslant}_R|)\}$。

证明 (1)由定义知：$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R \mid c([x]^{\geqslant}_R,X)<1-\beta$ 且 $|[x]^{\geqslant}_R\cap X|>k\}$，由 $c([x]^{\geqslant}_R,X)=1-\dfrac{|[x]^{\geqslant}_R\cap X|}{|[x]^{\geqslant}_R|}<1-\beta$，有 $-|[x]^{\geqslant}_R\cap X|<-\beta|[x]^{\geqslant}_R|$，则 $|[x]^{\geqslant}_R\cap X|>\beta|[x]^{\geqslant}_R|$，故 $|[x]^{\geqslant}_R\cap X|>\max(k,\beta|[x]^{\geqslant}_R|)$。

(2)同理可得。

定理 3.4 设 $S^{\geqslant}=(U,A,f)$ 为序信息系统，$\forall X\subseteq U$，$k\in N$，$R^{\geqslant}$ 为 $S^{\geqslant}$ 中的优势关系有下列结论成立：

(1)当 $0\leqslant\beta<0.5$ 且 $k\neq 0$ 有：

$$\begin{aligned}
&posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X\\
&=(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R \mid |[x]^{\geqslant}_R|\geqslant k/\beta,\ |[x]^{\geqslant}_R\cap X|\geqslant|[x]^{\geqslant}_R|-k\})\\
&\quad\cup(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R \mid k/(1-\beta)<|[x]^{\geqslant}_R|<k/\beta,\ |[x]^{\geqslant}_R\cap X|\geqslant(1-\beta)|[x]^{\geqslant}_R|\})\\
&\quad\cup(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R \mid |[x]^{\geqslant}_R|\leqslant k/(1-\beta),\ |[x]^{\geqslant}_R\cap X|>k\})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&negR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X\\
&=(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R \mid |[x]^{\geqslant}_R|\geqslant k/\beta,\ |[x]^{\geqslant}_R\cap X|\leqslant\beta|[x]^{\geqslant}_R|\})\\
&\quad\cup(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R \mid k/(1-\beta)<|[x]^{\geqslant}_R|<k/\beta,\ |[x]^{\geqslant}_R\cap X|\leqslant k\})\\
&\quad\cup(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R \mid |[x]^{\geqslant}_R|\leqslant k/(1-\beta),\ |[x]^{\geqslant}_R\cap X|<(1-\beta)|[x]^{\geqslant}_R|\})
\end{aligned}$$

$$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X$$
$$=(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|\geqslant k/\beta,\beta|[x]^{\geqslant}_{R}|<|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|<|[x]^{\geqslant}_{R}|-k\})$$
$$\bigcup(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid k/(1-\beta)<|[x]^{\geqslant}_{R}|<k/\beta,k<|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|<(1-\beta)|[x]^{\geqslant}_{R}|\})$$
$$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k/1-\beta,(1-\beta)|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\leqslant k\}$$

(2)当 $0.5<\beta\leqslant1$ 且 $k\neq0$ 时有：

$$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}$$
$$=(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|>k/(1-\beta),|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\geqslant|[x]^{\geqslant}_{R}|-k\})$$
$$\bigcup(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid k/\beta<|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k/(1-\beta),|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|>\beta|[x]^{\geqslant}_{R}|\})$$
$$\bigcup(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k/\beta,|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|>k\})$$
$$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}$$
$$=(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|>k/(1-\beta),|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\leqslant\beta|[x]^{\geqslant}_{R}|\})$$
$$\bigcup(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid k/\beta<|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k/(1-\beta),|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|<|[x]^{\geqslant}_{R}|-k\})$$
$$\bigcup(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k/\beta,|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|<(1-\beta)|[x]^{\geqslant}_{R}|\})$$
$$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|>k/(1-\beta),\beta|[x]^{\geqslant}_{R}|<|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|<|[x]^{\geqslant}_{R}|-k\}$$
$$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X$$
$$=(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid k/\beta<|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k/(1-\beta),|[x]^{\geqslant}_{R}|-k\leqslant|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\leqslant\beta|[x]^{\geqslant}_{R}\})$$
$$\bigcup(\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k/\gamma,(1-\beta)|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\leqslant k\})$$

证明　此处我们仅选取 $posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}$ 赖证明，由 $0<\beta<0.5$ 且 $k\neq0$ 可得 $k/(1-\beta)<k/\beta$.

(1)当 $k/(1-\beta)<|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k/\beta$ 时有 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Leftrightarrow[x]^{\geqslant}_{S}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$ 和 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Leftrightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X$ 以及 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Rightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$，故当 $|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\geqslant(1-\beta)|[x]^{\geqslant}_{R}|$ 时有 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$，则 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X$；

(2)当 $|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k(1-\beta)$ 时有 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Leftrightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{k}}X$ 和 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Leftrightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X$ 以及 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Rightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$，故当 $|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|\geqslant k$ 时有 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$，则 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X$；

(3)当 $|[x]^{\geqslant}_{R}|>k/\beta$ 时有 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Leftrightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X$，$[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Leftrightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{k}}X$ 以及 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\Rightarrow[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$，故当 $|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X|>|[x]^{\geqslant}_{R}|-k$ 时有 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$，则 $[x]^{\geqslant}_{R}\subseteq posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}X$.

当 $\beta=0$ 时，定理显然成立。

综上 $posR^{\geqslant}_{\beta\wedge k}$ 得以证明，当 $0.5<\beta\leqslant1$ 时，以及其他区域可以类似的得到。

定理 3.5　设 $S^{\geqslant}=(U,A,f)$ 为序信息系统，$\forall X,Y\subseteq U$，$\alpha,\beta\in[0,1]$，$k,l\in N$，$R^{\geqslant}$ 为 $S^{\geqslant}$ 中的优势关系有下列结论成立：

(1) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}\varnothing=\varnothing$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}U=U$；当 $\beta=1$ 时，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}\varnothing=\underline{R^{\geqslant}_{k}}\varnothing=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|\leqslant k\}$，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}U=\varnothing$；当 $\beta\neq1$ 时，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}\varnothing=\underline{R^{\geqslant}_{k}}\varnothing$，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}U=\overline{R^{\geqslant}}U=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid|[x]^{\geqslant}_{R}|>k\}$；

(2)若 $X\subseteq Y$，则 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}Y$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}Y$；

(3) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X\cup Y)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\cup\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}Y$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X\cup Y)\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\cup\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}Y$；

(4) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X\cap Y)\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\cap\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}Y$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(X\cap Y)=\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\cap\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}Y$；

(5)若 $\beta\geqslant\alpha,k\geqslant l$ 有：$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge l}}X$，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge k}}X$，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge l}}X$；$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge l}}X$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge k}}X$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge l}}X$；

(6) $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(\sim X)=\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(\sim X)=\sim\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X$.

证明　(1)，(2)，(3)，(4)，(5)易证。

（6）要证明该定理需要引入文献[7]中基于"逻辑或"的上下近似（$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X$）的定义：

$$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid c([x]^{\geqslant}_{R},X)<1-\beta\text{ 或 }|[x]^{\geqslant}_{R}|>k\}$$

$$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_{R}\mid c([x],X)\leqslant\beta\text{ 或 }|[x]^{\geqslant}_{R}|-|[x]^{\geqslant}_{R}\cap X\leqslant k\}$$

则有：$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(\sim X)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(\sim X)\cap\overline{R^{\geqslant}_{k}}(\sim X)=(\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X)\cap(\sim\underline{R^{\geqslant}_{k}}X)=\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X$.

同理可以得到：$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}(\sim X)=\sim\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}X$.

4 案例分析

设 $S^{\geqslant}=(U,A,V,F)$ 是一个序信息系统，设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{20}\}$ 代表某班的 20 个学生，$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 分别代表语文、数学、英语和综合科目，$V=\{3,2,1\}$，其中 3 表示"优秀"，2 表示"一般"，1 表示"不合格"统计数据如表 1。

表 1 学生成绩统计数据

U	语文	数学	外语	综合	U	语文	数学	外语	综合
x_1	3	3	2	3	x_{11}	3	1	3	3
x_2	3	3	2	2	x_{12}	1	2	1	1
x_3	1	2	1	2	x_{13}	2	2	2	1
x_4	2	1	2	2	x_{14}	1	2	2	1
x_5	2	2	2	2	x_{15}	1	2	2	2
x_6	2	2	3	3	x_{16}	3	1	2	2
x_7	3	2	3	1	x_{17}	3	3	1	1
x_8	1	1	1	2	x_{18}	3	3	2	1
x_9	2	3	3	3	x_{19}	2	1	1	1
x_1	2	3	1	2	x_{20}	1	3	3	1

计算优势关系下的对象分类，不妨选取 $\beta=0.3$ 和 $k=1$，并且随机抽取取一部分学生作为研究对象记为 $X=\{x_7,x_9,x_{11},x_{17},x_{19},x_{20}\}$，计算得到相应的 $|[x_i]^{\geqslant}_{A}|$、$|[x_i]^{\geqslant}_{A}\cap X|$ 以及 $c([x_i]^{\geqslant}_{A},X)$ 和 $|[x_i]^{\geqslant}_{A}|-|[x_i]^{\geqslant}_{A}\cap X|$ 值见表 2。

方法 1：由定理 3.1 求解

（1）当 $\beta=0.3$ 时，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X=\{x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{19},x_{20}\}$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X=\{x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$；当 $k=1$ 时，$\overline{R^{\geqslant}_{k}}X=\{x_4,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{19},x_{20}\}$，$\underline{R^{\geqslant}_{k}}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$。

（2）利用（1）所求结果以及定理 3.1 可以得到：$\overline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge1}}X=\{x_{19},x_{20}\}$，$\underline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge1}}X=\{x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$。

（3）利用（2）所求结果由定义 3.1 通过集合运算得到：$posR^{\geqslant}_{0.3\wedge1}X=\{x_{20}\}$，$negR^{\geqslant}_{0.3\wedge1}X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_8,x_{10},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}$，$UbnR^{\geqslant}_{0.3\wedge1}X=\{x_{19}\}$，$LbnR^{\geqslant}_{0.3\wedge1}X=\{x_7,x_9,x_{11}\}$，$bnR^{\geqslant}_{0.3\wedge1}X=\{x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$。

方法 2：由定理 3.2 和定理 3.4 求解

由 $\beta=0.3$，$k=1$ 可以得到 $k/(1-\beta)=10/7$，$k/\beta=10/3$，求解如表 3。

（1）利用表 2 数据进一步计算可以得到结果如表 3。$posR^{\geqslant}_{0.3\vee1}X=\{x_{20}\}$，$negR^{\geqslant}_{0.3\vee1}X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_8,x_{10},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}$，$UbnR^{\geqslant}_{0.3\vee1}X=\{x_{19}\}$，$LbnR^{\geqslant}_{0.3\vee1}X=\{x_7,x_9,x_{11}\}$，$bnR^{\geqslant}_{0.3\vee1}X=\{x_7,x_9,x_{11},x_{19}\}$。

（2）利用（1）所求结果及定理 3.2 可以计算得到：$\overline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge1}}X=\{x_{19},x_{20}\}$，$\underline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge1}}X=\{x_7x_9,x_{11},x_{20}\}$。

表 2　学生成绩优势类计算数据

x_i	$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert$	$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\cap X\rvert$	$c([x_i]_A^{\geqslant},X)$	$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert-\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\cap X\rvert$	x_i	$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert$	$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\cap X\rvert$	$c([x_i]_A^{\geqslant},X)$	$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert-\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\cap X\rvert$
1	1	0	1	1	11	1	1	0	0
2	2	0	1	2	12	15	4	11/15	11
3	8	1	7/8	7	13	8	2	3/4	6
4	8	2	3/4	6	14	11	3	8/11	8
5	5	1	4/5	4	15	6	1	5/6	5
6	2	1	1/2	1	16	4	1	3/4	3
7	1	1	0	0	17	4	1	3/4	3
8	12	2	5/6	10	18	3	0	1	3
9	1	1	0	0	19	14	5	9/14	9
10	4	1	3/4	3	20	2	2	0	0

表 3　优势类的分布情况及区域归属

第一轮比较:$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\rvert$	第二轮比较:$\lvert[x_i]_A^{\geqslant}\cap X\rvert$	优势类分布:x_i	粗糙集区域归属	比较大小次数	辅助变量个数
$\geqslant k/\beta$	$\geqslant\lvert[x]_R^{\geqslant}\rvert-k$	null	$posR_{\beta\vee k}^{\geqslant}X$	0	0
$\geqslant k/\beta$	$(\beta\lvert[x]_R^{\geqslant}\rvert,\lvert[x]_R^{\geqslant}\rvert-k)$	19	$UbnR_{\beta\vee k}^{\geqslant}X$	3	2
$\geqslant k/\beta$	$\leqslant\beta\lvert[x]_R^{\geqslant}\rvert$	3,4,5,8,10,12,13,14,15,16,17	$negR_{\beta\vee k}^{\geqslant}X$	2	1
$(k/(1-\beta),k/\beta)$	$\geqslant(1-\beta)\lvert[x]_R^{\geqslant}\rvert$	20	$posR_{\beta\vee k}^{\geqslant}X$	3	1
$(k/(1-\beta),k/\beta)$	$(k,(1-\beta)\lvert[x]_R^{\geqslant}\rvert)$	null	$UbnR_{\beta\vee k}^{\geqslant}X$	0	0
$(k/(1-\beta),k/\beta)$	$\leqslant k$	2,6,18	$negR_{\beta\vee k}^{\geqslant}X$	3	0
$\leqslant k/1-\beta$	$>k$	null	$posR_{\beta\vee k}^{\geqslant}X$	0	0
$\leqslant k/(1-\beta)$	$\leqslant(1-\beta)\lvert[x]_R^{\geqslant}\rvert$	1	$negR_{\beta\vee k}^{\geqslant}X$	2	1
$\leqslant k/(1-\beta)$	$((1-\beta)\lvert[x]_R^{\geqslant}\rvert,k)$	7,9,11	$LbnR_{\beta\vee k}^{\geqslant}X$	3	1

上述两种方法求解结果是一致的,但是其求解过程中的时间和空间复杂性却不一样,利用方法 1 求解其时间复杂性 $T_1=80$ 空间复杂性 $S_1=40$;利用方法 2 求解其的时间复杂性 $T_2=48$ 空间复杂性 $S_2=18$。第一种方法是通过首先求其上、下近似集,而后再利用集合的运算求得各个粗糙集区域,其时间复杂性为:$T_1(n)=4n$,空间复杂性为:$S_1(n)=2n$,它们都是关于对象个数 n 的值,当对象个数给定后其值固定。而第二种方法是基于本文的工作,通过利用定理 3.4 对粗糙集区域的精确描述,我们可以迅速的判定对象 x_i 所归属的粗糙集区域,然后再利用定理 3.2 求其上、下近似集。分析表 4.3 可知,方法 2 在最坏的情况下,其时间复杂性为:$T_2(n)=4n$,空间复杂性为:$S_2(n)=2n$,此时与方法 1 完全一致,但是在最理想的情况下,其时间复杂性为:$T_2(n)=2n$,空间复杂性为:$S_2(n)=c$,其中 c 为常数,所以无论何时方法 2 在求解的时间和空间上不劣于方法 1,一般来讲方法 2 在时间和空间上都有比较明显的优势,特别当面对大量的数据处理时其优势就非常明显了。

5　结束语

本文在序信息系统下,通过“逻辑与”的方式将变精度粗糙集与程度的粗糙集结合起来研究,建立了

一种新的粗糙集模型，分析了其基本结构并且得到一些数学性质。紧接着利用两种方法对学生成绩案例进行了分析，通过对求解方法的比较可以知道，正是通过本文对粗糙集区域做出了更精确的刻画，在实际工程应用中能够从时间和空间两方面来简化求解，接下来关于程度粗糙集与变精度粗糙集结合的更深层次的研究将继续进行。

参考文献：

[1] An A, Shan N, Chan C, Cercone N, Ziarko W. Discovering rules for water demand prediction: An enhanced rough－set approach[J]. Engineering Application of Artificial Intelligence,1996,9:645～653.

[2] Dembczynski K, Pindur R, Susmaga R. Dominance-based rough set classifier without induction of decision rules [J]. Electronic Notes Theory Computer Science,2003,82:84～95.

[3] Dembczynski K, Pindur R, Susmaga R. Generation of exhaustive set of rules within dominance-based rough set approach[J]. Electronic Notes Theory Computer Science,2003,82:96～107.

[4] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11(5):341～356.

[5] Xu W H, Liu S H, Wang Q R. The first type of grade rough set based on rough membership function[C]//2010 Seventh International Conference System and Knowledge Discovery(FSKD2010),2010:1922～1926.

[6] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京：科学出版社，2013.

[7] 余建航，徐伟华. 序信息系统下变精度与程度的“逻辑或”粗糙集[J]. 计算机科学与探索，2015,9(1):112～118.

[8] Yao Y Y, Lin T Y. Generalization of rough sets using modal logics[J]. Intelligent Automatic and Soft Computing, 1996,2:103～120.

[9] Ziarko W. Variable precision rough set model[J]. Journal of Computer and System Sciences,1993,46(1):39～59.

[10] 张文修，吴伟志，梁吉业，李德玉. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001.

[11] 张文修，梁怡，吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京：科学出版社，2003.

[12] 张贤勇，莫志文. 变精度粗糙集[J]. 模式识别与人工智能，2004,17(2):151～155.

[13] 张贤勇，熊方，莫志文. 精度与程度的逻辑或粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能，2009,17(9):151～155.

[14] Zhang X Y, Mo Z W, Xiong F, Cheng W. Comparative study of variable precision rough set model and graded rough set model[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2012,53:104～116.

The Rough Set Based on Logical Conjunction Operation of Variable Precision and Grade in Ordered Information System

YU Jian-hang[1], XU Wei-hua[1,2]

(1. School of mathematics and statistics, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China;
2. Key Laboratory of Intelligent Perception and Systems for High-Dimensional Information, Ministry of Education, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: In this paper, the model of the rough set based on logical conjunction operation of variable precision and grade are proposed in ordered information system. It merges the advantages of these two models. The basic structure and accurate description of the new rough set model are discussed respectively. Moreover, some important properties of the model are investigated carefully. Furth more, a specific case study about the student achievement is analyzed. The new model has extended classical rough set and provides some new theories about knowledge discovery in ordered information system.

Key words: Logical Conjunction Operation; Rough Set Theory; Variable Precision Rough Set; Graded Rough Set; Ordered Information System