余建航,徐伟华.序信息系统下变精度与程度的“逻辑或”粗糙集[J].计算机科学与探索,2015,9(1):112-118.

ISSN 1673-9418 CODEN JKYTA8
Journal of Frontiers of Computer Science and Technology
1673-9418/2015/09(01)-0112-07
doi: 10.3778/j.issn.1673-9418.1406021

E-mail: fcst@vip.163.com
http://www.ceaj.org
Tel: +86-10-89056056

序信息系统下变精度与程度的“逻辑或”粗糙集*

余建航[1],徐伟华[1,2+]

1. 重庆理工大学 数学与统计学院,重庆 400054
2. 南京理工大学 高维信息智能感知与系统教育部重点实验室,南京 210094

Rough Set Based on Logical Disjunct Operation of Variable Precision and Grade in Ordered Information System*

YU Jianhang[1], XU Weihua[1,2+]

1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China
2. Key Laboratory of Intelligent Perception and Systems for High-Dimensional Information, Ministry of Education, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China

\+ Corresponding author: E-mail: chcuwh@gmail.com

YU Jianhang, XU Weihua. Rough set based on logical disjunct operation of variable precision and grade in ordered information system. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2015, 9(1): 112-118.

Abstract: Variable precision rough set model and grade rough set model are two important expanding rough set models. Precision and grade relate to the relative and absolute quantitative information in approximate space respectively. To integrate relative quantitative information and absolute quantitative information and make rough set possess the stronger data processing ability and wider application fields, this paper proposes the model of rough set based on logical disjunct operation of variable precision and grade in ordered information system. This paper also discusses the basic structure and accurate description of a rough set respectively, and investigates some important properties of the model carefully. Furthermore, this paper analyzes a specific case study about the student achievement, discusses

* The National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 61105041, 61472463, 61402064 (国家自然科学基金); the Natural Science Foundation of Chongqing under Grant No. cstc2013jcyjA40051 (重庆市自然科学基金); the Fund of Key Laboratory of Intelligent Perception and Systems for High-Dimensional Information, Ministry of Education, Nanjing University of Science and Technology under Grant No. 30920140122006 (南京理工大学高维信息智能感知与系统教育部重点实验室基金); the Graduate Innovation Foundation of Chongqing University of Technology under Grant No. YCX2014236 (重庆理工大学研究生创新基金).

Received 2014-06, Accepted 2014-08.

CNKI网络优先出版:2014-09-12, http://www.cnki.net/kcms/doi/10.3778/j.issn.1673-9418.1406021.html

the significance of study on logical disjunct operation of variable precision and grade rough set models, and provides more abundant theoretical basis for knowledge discovery in ordered information systems.
Key words: variable precision rough set; grade rough set; ordered information system; logical disjunct operation

摘　要：变精度粗糙集模型和程度粗糙集模型是两类重要的粗糙集扩张模型，其中精度反映了近似空间的相对量化信息，而程度则刻画了近似空间的绝对量化信息。为了融合相对量化信息和绝对量化信息，使粗糙集具有更强的数据处理能力与更广的适用领域，提出了序信息系统下的变精度与程度“逻辑或”粗糙集的概念，得到其粗糙集区域的基本结构和精确描述，深入讨论了其重要性质。结合学生成绩这一具体案例的求解分析，进一步阐述了对变精度与程度的“逻辑或”粗糙集进行研究的意义，为序信息系统的知识发现提供了更丰富的理论基础。
关键词：变精度粗糙集；程度粗糙集；序信息系统；逻辑或
文献标志码：A　**中图分类号：**TP18

1　引言

粗糙集方法对于处理复杂信息系统是一种非常有效的方法，该理论由波兰数学家Pawlak[1]于1982年提出，是进行数据分析的一种数学工具，是经典集合论的推广。该理论视论域的划分为知识，通过对其进行刻画进而研究规则提取、知识约简等，在信息系统分析、人工智能、知识发现、数据挖掘等诸多领域取得了成功的应用。伴随着该理论的不断完善和应用的不断深入[2]，经典粗糙集在许多方面显现出不足，这就需要对经典粗糙集理论进行扩展。变精度粗糙集[3-4]和程度粗糙集[5-7]正是在这样的背景下应运而生，并且这两个粗糙集模型在理论和应用方面都已经取得了丰硕的成果。然而变精度粗糙集反映的是近似空间的相对量化信息，而程度粗糙集反映的是绝对量化信息[8]，它们各有好处也各自存在弊端。那么如果将两者结合起来进行研究，采用精度与程度同时进行刻画，则信息的量化就显得更加全面和深入，从而建立了一些更高层次的扩展粗糙集模型[9-10]。另外经典粗糙集模型基于等价关系，然而在实际工程应用中等价关系往往不具备太大的意义，需要基于优势关系[11-12]来建立信息系统，也就是序信息系统，那么在序信息系统下研究变精度与程度“逻辑或”的粗糙集应该是一项有意义的工作。

2　预备知识

设$|C|$表示集合C的基数，$c([x]_R, X)=1-|[x]_R\cap X|/|[x]_R|$称为等价类$[x]_R$关于集合$X$的错误分类率，$\beta$为0到1的实数，称为可调错误分类水平，$1-\beta$称为精度。集合

$$\overline{R_\beta}X=\bigcup\{[x]_R:c([x]_R,X)<1-\beta\}$$

$$\underline{R_\beta}X=\bigcup\{[x]_R:c([x]_R,X)\leqslant\beta\}$$

分别称为X的精度为$1-\beta$的R上、下近似集。若$\overline{R_\beta}X\neq\underline{R_\beta}X$，则称$X$在精度$1-\beta$下是$R$粗糙的，否则称$X$是$R$精确的。而$\overline{R_\beta}X$是“关于$X$的错误分类率小于$1-\beta$的等价类”的并集，$\underline{R_\beta}X$是“关于$X$的错误分类率不大于$\beta$的等价类”的并集。在变精度粗糙集模型中[13]，参数β的取值范围一般在$[0, 0.5)$，也可以将参数β的取值范围限定在$(0.5, 1.0]$，这种情况可以看作是增进的粗糙集理论[14]。本文为了更一般化，将参数β限定在$[0, 1]$上取值，其实$\beta\in(0.5, 1.0]$和$\beta\in(0, 0.5]$两种情况具有很强的对称性，一般情况下只需研究$\beta\in(0.5, 1.0]$，而$\beta\in(0, 0.5]$可以类似得到。

任取自然数k，那么集合$\overline{R_k}X=\bigcup\{[x]_R\,|\,|[x]_R\cap X|>k\}$和$\underline{R_k}X=\bigcup\{[x]_R\,|\,|[x]_R|-|[x]_R\cap X|\leqslant k\}$分别称为$X$的程度为$k$的$R$上、下近似集。若$\overline{R_k}X\neq\underline{R_k}X$，称$X$在程度$k$时是$R$粗糙的，否则称为$R$精确的。其中$\overline{R_k}X$是“属于$X$的元素个数多于$k$个等价类”的并集，$\underline{R_k}X$是“最多只有$k$个元素不属于$X$的等价类”的集合。

设$S=(U, A, V, F)$为信息系统，其中$U=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$为非空有限对象集，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$为属

性集，$F=\{f|U\to V_{a_i}, a\in A\}$ 是 U 与 A 之间的关系集，V_a 为 a 的有限值域。对给定信息系统 S，如果属性 $a\in A$ 的值域上有偏序关系“$\geq_a$”，称 a 为一个准则。$\forall x,y\in U, x\geq_a y$ 表示 x 至少和 y 在准则 a 下是一样好的，即 x 优于 y，$x\geq_a y\Leftrightarrow f(x,a)\geq_a f(y,a)$ 对于属性集 $B\subseteq A, x\geq_B y$ 表示 x 关于 B 中的所有准则都优于 y。当信息系统 S 中所有的属性都为准则时，称该信息系统为一个序信息系统，记为 $S^{\geq}=(U,A,V,F)$，简记为 $S^{\geq}=(U,A)$。

设 $S^{\geq}=(U,A,f)$ 为序信息系统，对任意的 $B\subseteq A$，集合 $R_B^{\geq}=\{(x,y)\in U\times U|f_l(x)\leqslant f_l(y), \forall a_l\in B\}$ 称为关于属性集 B 的优势关系，且 $[x]_B^{\geq}=\{y\in U|(x,y)\in R_B^{\geq}\}=\{y\in U|f_l(x)\leqslant f_l(y), \forall a_l\in B\}$ 称为关于属性子集 B 的优势类；对 $\forall X\subseteq U$，集合 $\overline{A^{\geq}}(X)=\cup\{[x]_A^{\geq}|[x]_A^{\geq}\cap X\neq\varnothing\}$，$\underline{A^{\geq}}(X)=\cup\{[x]_A^{\geq}|[x]_A^{\geq}\subseteq X\}$，$posA^{\geq}(X)=\underline{A^{\geq}}(X)$，$negA^{\geq}(X)=\sim\overline{A^{\geq}}(X)$，$bnA^{\geq}(X)=\overline{A^{\geq}}(X)-\underline{A^{\geq}}(X)$ 分别称为 X 在序信息系统下的 $A^{\geq}$ 上近似集、下近似集、正域、负域、上边界域、下边界域和边界域。如果 $\overline{A^{\geq}}X\neq\underline{A^{\geq}}X$，则称 X 在序信息系统下是 $A^{\geq}$ 粗糙的，若 $\overline{A^{\geq}}X=\underline{A^{\geq}}X$，则称为精确的或可描述的[15-16]。

3 序信息系统下变精度与程度“逻辑或”粗糙集

前文介绍了精度粗糙集、程度粗糙集，以及在序信息系统下的粗糙集，给出了一些基本的定义，现在需要在序信息系统下研究变精度与程度“逻辑或”粗糙集，并深入讨论其性质。

定义1 设 $S^{\geq}=(U,A,f)$ 为序信息系统，对 $\forall X\subseteq U$，R 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，将

$$\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X=\cup\{[x]_R^{\geq}|c([x]_R^{\geq},X)<1-\beta\text{或}|[x]_R^{\geq}\cap X|>k\}$$

$$\underline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X=\cup\{[x]_R^{\geq}|c([x]_R^{\geq},X)\leqslant\beta\text{或}|[x]_R^{\geq}|-|[x]_R^{\geq}\cap X|\leqslant k\}$$

分别称为 X 在序信息系统下的精度为 $1-\beta$，程度为 k 的逻辑或 $R^{\geq}$ 上近似集、下近似集。根据上述定义，仿照经典Pawlak粗糙集定义其他区域如下：

$$posR^{\geq}_{\beta\vee k}X=\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X\cap\underline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X$$

$$negR^{\geq}_{\beta\vee k}X=\sim(\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X\cup\underline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X)$$

$$UbnR^{\geq}_{\beta\vee k}X=\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X-\underline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X$$

$$LbnR^{\geq}_{\beta\vee k}X=\underline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X-\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X$$

$$bnR^{\geq}_{\beta\vee k}X=UbnR^{\geq}_{\beta\vee k}X\cup LbnR^{\geq}_{\beta\vee k}X$$

分别称为正域、负域、上边界域、下边界域和边界域。

定理1 设 $S^{\geq}=(U,A,f)$ 为序信息系统，对 $\forall X\subseteq U$，R 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，$\beta\in[0,1], k\in N$，有：

（1）$\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X=\overline{R^{\geq}_{\beta}}X\cup\overline{R^{\geq}_{k}}X$

（2）$\underline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X=\underline{R^{\geq}_{\beta}}X\cup\underline{R^{\geq}_{k}}X$

证明 （1）对 $\forall x\in\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X$，则有 $c([x]_R^{\geq},X)<1-\beta$ 或 $|[x]_R^{\geq}\cap X|>k$，即 $x\in\overline{R^{\geq}_{\beta}}X$，$x\in\overline{R^{\geq}_{k}}X$，故 $x\in\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X\subseteq\overline{R^{\geq}_{\beta}}X\cup\overline{R^{\geq}_{k}}X$。另外，对 $\forall x\in\overline{R^{\geq}_{\beta}}X\cup\overline{R^{\geq}_{k}}X$，有 $x\in\overline{R^{\geq}_{\beta}}X$ 或 $x\in\overline{R^{\geq}_{k}}X$，即 $c([x]_R^{\geq},X)<1-\beta$ 或 $|[x]_R^{\geq}\cap X|>k$，故 $\overline{R^{\geq}_{\beta}}X\cup\overline{R^{\geq}_{k}}X\subseteq\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X$。

综上可得 $\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X=\overline{R^{\geq}_{\beta}}X\cup\overline{R^{\geq}_{k}}X$。

（2）证明方法与（1）类似。 □

特别地：

当 $\beta=0, k\neq0$，$\underline{R^{\geq}_{k}}X=\underline{R^{\geq}_{0\vee k}}X, \overline{R^{\geq}}X=\overline{R^{\geq}_{0\vee k}}X$；

当 $\beta\neq0, k=0$，$\underline{R^{\geq}_{\beta}}X=\underline{R^{\geq}_{\beta\vee0}}X, \overline{R^{\geq}_{\beta}}X=\overline{R^{\geq}_{\beta\vee0}}X$；

当 $\beta=0, k=0$，$\underline{R^{\geq}}X=\underline{R^{\geq}_{0\vee0}}X, \overline{R^{\geq}}X=\overline{R^{\geq}_{0\vee0}}X$；

当 $\beta=1, k\neq0$，$\overline{R^{\geq}_{k}X}=\overline{R^{\geq}_{1\vee k}}X$；

当 $\beta=1, k=0$，$\overline{R^{\geq}X}=\overline{R^{\geq}_{1\vee0}}X$。

定理2 设 $S^{\geq}=(U,A,f)$ 为序信息系统，对 $\forall X\subseteq U$，R 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，$\beta\in[0,1], k\in N$，有：

（1）$\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X=posR^{\geq}_{\beta\vee k}\cup UbnR^{\geq}_{\beta\vee k}$

（2）$\underline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X=posR^{\geq}_{\beta\vee k}\cup LbnR^{\geq}_{\beta\vee k}$

证明 由定义可以直接得到。 □

定理3 设 $S^{\geq}=(U,A,f)$ 为序信息系统，对 $\forall X\subseteq U, \beta\in[0,1], k\in N$，$R$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，有：

（1）$\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X=\cup\{[x]_R^{\geq}||[x]_R^{\geq}\cap X|>\min(k,\beta|[x]_R^{\geq}|)\}$

（2）$$\underline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X=\cup\{[x]_R^{\geq}||[x]_R^{\geq}\cap X|\geqslant \min(|[x]_R^{\geq}|-k, |[x]_R^{\geq}|-\beta|[x]_R^{\geq}|)\}$$

证明 （1）由定义可知 $\overline{R^{\geq}_{\beta\vee k}}X=\cup\{[x]_R^{\geq}|c([x]_R^{\geq},X)<1-\beta$ 或 $|[x]_R^{\geq}\cap X|>k\}$，$c([x]_R^{\geq},X)=1-|[x]_R^{\geq}\cap X|/|[x]_R^{\geq}|<$

$1-\beta$，则有 $-\|[x]_R^{\geq}\cap X\|<-\beta\|[x]_R^{\geq}\|$，故 $\|[x]_R^{\geq}\cap X\|>\beta\|[x]_R^{\geq}\|$。

（2）同理可得。 □

定理4 设 $S^{\geq}=(U,A,f)$ 为序信息系统，对 $\forall X\subseteq U, k\in N, R$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，有下列结论成立：

（1）当 $0<\beta<0.5$ 且 $k\neq 0$ 时

$$posR_{\beta\vee k}^{\geq}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|\geq k/\beta, \|[x]_R^{\geq}\cap X\|\geq (1-\beta)\|[x]_R^{\geq}\|\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|k/(1-\beta)<\|[x]_R^{\geq}\|<k/\beta, \|[x]_R^{\geq}\cap X\|\geq\|[x]_R^{\geq}\|-k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|\leq k/(1-\beta), \|[x]_R^{\geq}\cap X\|\geq\beta\|[x]_R^{\geq}\|\})$$

$$negR_{\beta\vee k}^{\geq}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|\geq k/\beta, \|[x]_R^{\geq}\cap X\|\leq k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|k/(1-\beta)<\|[x]_R^{\geq}\|<k/\beta, \|[x]_R^{\geq}\cap X\|\geq\beta\|[x]_R^{\geq}\|\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|<k/(1-\beta), \|[x]_R^{\geq}\cap X\|\geq\|[x]_R^{\geq}\|-k\})$$

$$UbnR_{\beta\vee k}^{\geq}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|\geq k/\beta, k<\|[x]_R^{\geq}\cap X\|<(1-\beta)\|[x]_R^{\geq}\|\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|k/(1-\beta)<\|[x]_R^{\geq}\|<k/\beta, \beta\|[x]_R^{\geq}\|<\|[x]_R^{\geq}\cap X\|<\|[x]_R^{\geq}\|-k\})$$

$$LbnR_{\beta\vee k}^{\geq}X=\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|\leq k/(1-\beta), \|[x]_R^{\geq}\|-k\leq\|[x]_R^{\geq}\cap X\|\leq\beta\|[x]_R^{\geq}\|\}$$

（2）当 $0.5\leq\beta<1.0$ 且 $k\neq 0$ 时

$$posR_{\beta\vee k}^{\geq}=(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|>k/(1-\beta), \|[x]_R^{\geq}\cap X\|\geq (1-\beta)\|[x]_R^{\geq}\|\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|k/\beta<\|[x]_R^{\geq}\|\leq k/(1-\beta), \|[x]_R^{\geq}\cap X\|>k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|\leq k/\beta, \|[x]_R^{\geq}\cap X\|>\beta\|[x]_R^{\geq}\|\})$$

$$negR_{\beta\vee k}^{\geq}=(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|>k/(1-\beta), \|[x]_R^{\geq}\cap X\|\leq k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|k/\beta<\|[x]_R^{\geq}\|\leq k/(1-\beta), \|[x]_R^{\geq}\cap X\|<(1-\beta)\|[x]_R^{\geq}\|\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|\leq k/\beta, \|[x]_R^{\geq}\cap X\|<\|[x]_R^{\geq}\|-k\})$$

$$UbnR_{\beta\vee k}^{\geq}X=\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|>k/(1-\beta), k<\|[x]_R^{\geq}\cap X\|<(1-\beta)\|[x]_R^{\geq}\|\}$$

$$LbnR_{\beta\vee k}^{\geq}X=(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|k/\beta<\|[x]_R^{\geq}\|\leq k/(1-\beta), (1-\beta)\|[x]_R^{\geq}\|\leq\|[x]_R^{\geq}\cap X\|\leq k\})\cup(\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|\leq k/\beta, \|[x]_R^{\geq}\|-k\leq\|[x]_R^{\geq}\cap X\|\leq\beta\|[x]_R^{\geq}\|\})$$

证明 由 $0<\beta<0.5$ 且 $k\neq 0$，可以得到 $\beta<1-\beta$，$k/(1-\beta)<k/\beta$。

（1）当 $\|[x]_R^{\geq}\|\geq k/\beta>2k$ 时，有 $[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\Leftrightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_k^{\geq}}X$ 和 $[x]_R^{\geq}\subseteq\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\Leftrightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\underline{R_\beta^{\geq}}X$，于是有 $[x]_R^{\geq}\subseteq\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\Rightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X$。故 $\|[x]_R^{\geq}\cap X\|\geq(1-\beta)\|[x]_R^{\geq}\|\Rightarrow\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X$, $posR_{\beta\vee k}^{\geq}X$。

（2）当 $k/(1-\beta)<\|[x]_R^{\geq}\|<k/\beta$ 时，有 $[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\Leftrightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_\beta^{\geq}}X$ 和 $[x]_R^{\geq}\subseteq\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\Leftrightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\underline{R_k^{\geq}}X$，于是有 $[x]_R^{\geq}\subseteq\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\Rightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X$。故 $\|[x]_R^{\geq}\cap X\|\geq\|[x]_R^{\geq}\|-k\Rightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X, posR_{\beta\vee k}^{\geq}X$。

（3）当 $\|[x]_R^{\geq}\|\leq k/(1-\beta)$ 时，有 $[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}$，即 $[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\Leftrightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_\beta^{\geq}}X$ 和 $[x]_R^{\geq}\subseteq\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\Leftrightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\underline{R_k^{\geq}}X$，于是有 $[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\Rightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X$。故 $\|[x]_R^{\geq}\cap X\|>\beta\|[x]_R^{\geq}\|\Rightarrow[x]_R^{\geq}\subseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X, posR_{\beta\vee k}^{\geq}X$。

其他对应的区域，以及当 $0.5\leq\beta<1.0$ 且 $k\neq 0$ 时可以类似地得到。 □

定理5 设 $S^{\geq}=(U,A,f)$ 为序信息系统，$\forall X,Y\subseteq U, \alpha,\beta\in[0,1], k,l\in N$，$R$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，有下列结论成立：

（1）$\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}\varnothing=\varnothing, \underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}U=U$

$\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}\varnothing=\bigcup\{[x]_R^{\geq}|\|[x]_R^{\geq}\|\leq k\}$

（2）若 $X\subseteq Y$，那么

$\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\subseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}Y, \underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\subseteq\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}Y$

（3）$\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}(X\cup Y)\supseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\cup\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}Y$

$\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}(X\cup Y)\supseteq\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\cup\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}Y$

（4）$\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}(X\cap Y)\subseteq\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\cap\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}Y$

$\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}(X\cap Y)\subseteq\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\cap\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}Y$

（5）若 $\beta\geq\alpha, k\geq l$，有

$\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\subseteq\overline{R_{\beta\vee l}^{\geq}}X, \overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\subseteq\overline{R_{\alpha\vee k}^{\geq}}X$

$\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\subseteq\overline{R_{\alpha\vee l}^{\geq}}X, \underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\supseteq\underline{R_{\beta\vee l}^{\geq}}X$

$\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\supseteq\underline{R_{\alpha\vee l}^{\geq}}X, \underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}X\supseteq\underline{R_{\alpha\vee l}^{\geq}}X$

（6）$\overline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}(\sim X)=\sim\underline{R_{\beta\wedge k}^{\geq}}X$，$\underline{R_{\beta\vee k}^{\geq}}(\sim X)=\sim\overline{R_{\beta\wedge k}^{\geq}}X$

证明 (1)、(2)、(3)、(4)、(5)易证。

(6)要证明该定理,需要引入 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$ 和 $\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$ 的定义,类似于该粗糙集的定义方式,其具体定义如下:

$$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R|c([x]^{\geqslant}_R,X)<1-\beta,|[x]^{\geqslant}_R|>k\}$$

$$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X=\bigcup\{[x]^{\geqslant}_R|c([x]^{\geqslant}_R,X)\leqslant\beta,|[x]^{\geqslant}_R|-|[x]^{\geqslant}_R\cap X|\leqslant k\}$$

$$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(\sim X)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}(\sim X)\cup\overline{R^{\geqslant}_{k}}(\sim X)=(\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X)\cup(\sim\underline{R^{\geqslant}_{k}}X)=\sim\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$$

同理可以得到:$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\vee k}}(\sim X)=\sim\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge k}}X$ 。 □

4 实例分析

设 $S^{\geqslant}=(U,A,V,F)$ 是一个序信息系统,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{20}\}$ 为论域,代表某班的20个学生,$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 分别代表语文、数学、英语和综合科目,$V=\{3,2,1\}$,其中3表示"优秀",2表示"一般",1表示"不合格",统计数据如表1。

Table 1 Students' achievement

表1 学生成绩统计

U	语文	数学	外语	综合
x_1	3	3	2	3
x_2	3	3	2	2
x_3	1	2	1	2
x_4	2	1	2	2
x_5	2	2	2	2
x_6	2	2	3	3
x_7	3	2	3	1
x_8	1	1	1	2
x_9	2	3	3	3
x_{10}	2	3	1	2
x_{11}	3	1	3	3
x_{12}	1	2	1	1
x_{13}	2	2	2	1
x_{14}	1	2	2	1
x_{15}	1	2	2	2
x_{16}	3	1	2	2
x_{17}	3	3	1	1
x_{18}	3	3	2	1
x_{19}	2	1	1	1
x_{20}	1	3	3	1

首先计算优势关系下的对象分类,然后选取精度 $\beta=0.3$,程度 $k=1$,并且随机抽取一部分学生作为研究对象,记为 $X=\{x_7,x_9,x_{11},x_{17},x_{19},x_{20}\}$,那么可以得到相应的 $|[x_i]^{\geqslant}_A|$、$|[x_i]^{\geqslant}_A\cap X|$、$c([x_i]^{\geqslant}_A,X)$、$|[x_i]^{\geqslant}_A|-|[x_i]^{\geqslant}_A\cap X|$,如表2所示。

Table 2 Computing data

表2 计算数据

x_i	$\lvert[x_i]^{\geqslant}_A\rvert$	$\lvert[x_i]^{\geqslant}_A\cap X\rvert$	$c([x_i]^{\geqslant}_A,X)$	$\lvert[x_i]^{\geqslant}_A\rvert-\lvert[x_i]^{\geqslant}_A\cap X\rvert$
1	1	0	1	1
2	2	0	1	2
3	8	1	7/8	7
4	8	2	3/4	6
5	5	1	4/5	4
6	2	1	1/2	1
7	1	1	0	0
8	12	2	5/6	10
9	1	1	0	0
10	4	1	3/4	3
11	1	1	0	0
12	15	4	11/15	11
13	8	2	3/4	6
14	11	3	8/11	8
15	6	1	5/6	5
16	4	1	3/4	3
17	4	1	3/4	3
18	3	0	1	3
19	14	5	9/14	9
20	2	2	0	0

情形1 利用定理1求解。

(1)当 $\beta=0.3$ 时:

$\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X=\{x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{19},x_{20}\}$

$\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}X=\{x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$

当 $k=1$ 时:

$\overline{R^{\geqslant}_{k}}X=\{x_4,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{19},x_{20}\}$

$\underline{R^{\geqslant}_{k}}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$

(2)利用(1)所求结果以及定理1可以得到:

$\overline{R^{\geqslant}_{0.3\vee 1}}X=\{x_4,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{19},x_{20}\}$

$\underline{R^{\geqslant}_{0.3\vee 1}}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$

Table 3 Distribution of dominant classes

表3 优势类的分布

第一轮比较：$\|[x_i]_A^{\geq}\|$	第二轮比较：$\|[x_i]_A^{\geq}\cap X\|$	优势类分布 x_i	粗糙集区域归属	比较大小次数	辅助变量个数
$\geq k/\beta$	$\leq k$	3,5,10,15,16,17	*neg*	2	0
$\geq k/\beta$	$(k,(1-\beta)\|[x]_R^{\geq}\|)$	4,8,12,13,14,19	*Ubn*	3	1
$\geq k/\beta$	$\geq(1-\beta)\|[x]_R^{\geq}\|$	Null	*pos*	0	0
$(k/(1-\beta), k/\beta)$	$\leq\beta\|[x]_R^{\geq}\|$	2,18	*neg*	3	1
$(k/(1-\beta), k/\beta)$	$(\beta\|[x]_R^{\geq}\|, \|[x]_R^{\geq}\|-k)$	Null	*Ubn*	0	0
$(k/(1-\beta), k/\beta)$	$\geq\|[x]_R^{\geq}\|-k$	6,20	*pos*	4	2
$\leq k/(1-\beta)$	$>\beta\|[x]_R^{\geq}\|$	7,9,11	*pos*	3	1
$\leq k/(1-\beta)$	$[\|[x]_R^{\geq}\|-k, \beta\|[x]_R^{\geq}\|]$	1	*Lbn*	3	1
$\leq k/(1-\beta)$	$<\|[x]_R^{\geq}\|-k$	Null	*neg*	0	0

（3）根据定义1，利用（2）所求结果，通过集合运算得到：

$posR_{0.3\vee 1}^{\geq}X=\{x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$

$negR_{0.3\vee 1}^{\geq}X=\{x_2,x_3,x_5,x_{10},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}$

$UbnR_{0.3\vee 1}^{\geq}X=\{x_4,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{19}\}$

$LbnR_{0.3\vee 1}^{\geq}X=\{x_1\}$

$bnR_{0.3\vee 1}^{\geq}X=\{x_1,x_4,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{19}\}$

情形2 利用定理4求解。

由 $\beta=0.3,k=1$ 可以得到 $k/\beta=10/3$ ，$k/(1-\beta)=10/7$，计算结果如表3所示。

（1）由表3计算结果可以得到：

$posR_{0.3\vee 1}^{\geq}X=\{x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$

$negR_{0.3\vee 1}^{\geq}X=\{x_2,x_3,x_5,x_{10},x_{15},x_{16},x_{17},x_{18}\}$

$UbnR_{0.3\vee 1}^{\geq}X=\{x_4,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{19}\}$

$LbnR_{0.3\vee 1}^{\geq}X=\{x_1\}$

$bnR_{0.3\vee 1}^{\geq}X=\{x_1,x_4,x_8,x_{12},x_{13},x_{14},x_{19}\}$

（2）利用（1）所求结果及定理2可以计算得到：

$\overline{R_{0.3\vee 1}^{\geq}}X=\{x_4,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{19},x_{20}\}$

$\underline{R_{0.3\vee 1}^{\geq}}X=\{x_1,x_6,x_7,x_9,x_{11},x_{20}\}$

所求得的两种结果是一致的，但是其时间和空间复杂性却不一样，其中情形1求解的时间复杂性 $T_1=80$，空间复杂性 $S_1=40$；情形2求解的时间复杂性 $T_2=56$，空间复杂性 $S_2=16$ 。在这个例子里面体现了当面对大量数据时，利用定理4求解具有明显的时间和空间优势。

5 结束语

本文在序信息系统下，研究了基于精度与程度的逻辑或粗糙集，得到了其基本结构与相应的重要性质，并且用两种方法对实例进行了分析。通过对方法的比较可以知道，通过本文的工作对粗糙集区域进行更精确的刻画，能够简化在时间和空间上的求解过程。

References:

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[2] Pawlak Z. Rough sets—theoretical aspects of reasoning about data[M]. Hingham, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[3] Ziarko W. Variable precision rough set model[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39-59.

[4] Zhang Wenxiu, Liang Yi, Wu Weizhi. Information system and knowledge discovery[M]. Beijing: Science Press, 2003.

[5] Yao Y Y, Lin T Y. Generalization of rough sets using modal logics[J]. Intelligent Automatic and Soft Computing, 1996, 2: 103-120.

[6] Zhang Wenxiu, Wu Weizhi, Liang Jiye, et al. Rough set theory and method[M]. Beijing: Science Press, 2001.

[7] Yao Y Y, Lin T Y. Graded rough set approximations based on nested neighborhood systems[C]//Proceeding of the 5th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing (EUFIT '97). Mainz, Aachen: Verlag, 1997: 196-200.

[8] Zhang Xianyong, Xiong Fang, Mo Zhiwen. Precision and degree of logic or rough set model[J]. Pattern Recognition and

Artificial Intelligence, 2009, 22(5): 697-703.

[9] Shen Jinbiao, Lv Yuejin. A generalized variable precision and degree of rough set[J]. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(36): 45-47.

[10] Zhang Xianyong, Mo Zhiwen. Variable precision rough set[J]. Pattern Recognition and Artificial Intellience, 2004, 17(2): 151-155.

[11] Dembczyński K, Pindur R, Susmaga R. Dominance-based rough set classifier without induction of decision rules[J]. Electronic Notes Theory Computer Science, 2003, 82(4): 84-95.

[12] Dembczyński K, Pindur R, Susmaga R. Generation of exhaustive set of rules within dominance-based rough set approach[J]. Electronic Notes Theory Computer Science, 2003, 82(4): 96-107.

[13] Zhang Xianyong, Mo Zhiwen, Xiong Fang, et al. Comparative study of variable precision rough set model and graded rough set model[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(1): 104-116.

[14] Xu Weihua, Liu Shihu, Wang Qiaorong. The first type of grade rough set based on rough membership function[C]//Proceedings of the 7th International Conference on System and Knowledge Discovery (FSKD '10), 2010: 1922-1926.

[15] Xu Weihua. Ordered information systems and rough sets theory[M]. Beijing: Science Press, 2013.

[16] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Dominance-based rough set approach as a proper way of handling graduality in rough set theory[J]. Transactions on Rough Sets VII, 2007, 4400: 36-52.

附中文参考文献：

[4] 张文修, 梁怡, 吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京: 科学出版社,2003.

[6] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[8] 张贤勇, 熊方, 莫志文. 精度与程度的逻辑或粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能, 2009, 22(5): 697-703.

[9] 申锦标, 吕跃进. 变精度与程度粗糙集的一种推广[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(36): 45-47.

[10] 张贤勇, 莫志文. 变精度粗糙集[J]. 模式识别与人工智能, 2004, 17(2): 151-155.

[15] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京: 科学出版社,2013.

YU Jianhang was born in 1991. He is a master candidate at Chongqing University of Technology. His research interest is the mathematical foundation of artificial intelligence.

余建航(1991—),男,重庆涪陵人,重庆理工大学硕士研究生,主要研究领域为人工智能的数学基础。

XU Weihua was born in 1979. He received the Ph.D. degree from Xi'an Jiaotong University in 2008. Now he is the vice-dean and master supervisor of School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology, and the director of Chongqing Mathematical Society. His research interests include fuzzy mathematics, artificial intelligence, rough set and the application of mathematical research, etc.

徐伟华(1979—),男,山西浑源人,2008年于西安交通大学获得博士学位,现为重庆理工大学数学与统计学院副院长、硕士生导师,重庆市数学学会理事,主要研究领域为模糊数学,人工智能,粗糙集,应用数学等。