ISSN 1673-9418 CODEN JKYTA8
Journal of Frontiers of Computer Science and Technology
1673-9418/2016/10(02)-0277-08
doi: 10.3778/j.issn.1673-9418.1505008

E-mail: fcst@vip.163.com
http://www.ceaj.org
Tel: +86-10-89056056

优势关系下变精度与程度“逻辑且”粗糙模糊集*

李蒙蒙[1],徐伟华[1,2+]
1. 重庆理工大学 数学与统计学院,重庆 400054
2. 南京理工大学 高维信息智能感知与系统教育部重点实验室,南京 210094

Rough Fuzzy Set of Logical and Operation of Variable Precision and Grade Based on Dominance Relation*

LI Mengmeng[1], XU Weihua[1,2+]
1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China
2. Key Laboratory of Intelligent Perception and Systems for High-Dimensional Information, Ministry of Education, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China
+ Corresponding author: E-mail: chcuwh@gmail.com

LI Mengmeng, XU Weihua. Rough fuzzy set of logical and operation of variable precision and grade based on dominance relation. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2016, 10(2): 277-284.

Abstract: By integrating variable precision rough fuzzy set and graded rough fuzzy set based on dominance relation, this paper proposes a rough fuzzy set model based on logical and operator of variable precision and grade in ordered information system, and gives the exact definitions of approximations operators and boundary. This model overcomes the shortcoming that the traditional logical and operator rough model cannot solve the problem of fuzzy concept, so the rough set of variable precision and degree has a wider application field. More, some important properties are discussed carefully. Finally, the solving method and significance of the model are shown by the employee case. The new model has extended variable precision rough set model, graded rough set model and classical

* The National Natural Science Foundation of China under Grant Nos. 61105041, 61472463, 61402064 (国家自然科学基金); the Natural Science Foundation of Chongqing under Grant No. cstc2013jcyjA40051 (重庆市自然科学基金); the Fund of Key Laboratory of Intelligent Perception and Systems for High-Dimensional Information, Ministry of Education, Nanjing University of Science and Technology under Grant No. 30920140122006 (南京理工大学高维信息智能感知与系统教育部重点实验室基金); the Graduate Innovation Foundation of Chongqing University of Technology under Grant No. YCX2014236 (重庆理工大学研究生创新基金).
Received 2015-05, Accepted 2015-09.
CNKI 网络优先出版:2015-09-16, http://www.cnki.net/kcms/detail/11.5602.TP.20150916.1522.006.html

rough set model, which provides some new theories about knowledge discovery in ordered information system.
Key words: graded rough fuzzy set; logical and operation; ordered information system; rough set theory; variable precision rough fuzzy set

摘　要:在优势关系下将变精度粗糙模糊集与程度粗糙模糊集融合起来,建立了一种基于“逻辑且”的粗糙模糊集模型,并给出了近似区域及边界区域的精确刻画。此模型克服了传统“逻辑且”粗糙模型不能解决模糊对象的问题,使得变精度与程度粗糙集具有更广的应用领域。同时,深入研究了该模型的重要性质。最后,通过员工考核的案例给出了模型具体求解方法和研究意义。序信息系统下变精度与程度的“逻辑且”粗糙模糊集是经典粗糙集理论的延伸和推广,为序信息系统的知识发现提供了新的理论基础。
关键词:程度粗糙模糊集;逻辑且;序信息系统;粗糙集理论;变精度粗糙模糊集
文献标志码:A　**中图分类号:**TP18

1 引言

粗糙集(rough set)是近年来发展起来的一种处理不确定和含糊信息的重要工具。自1982年提出粗糙集理论以来,该理论已经成为智能领域的研究热点,很多研究者建立了粗糙集理论的数学模型,还提出了运用粗糙集理论解决众多算法模型。伴随着该理论的不断完善和应用的不断深入[1],经典粗糙集在许多方面显现出不足,这就需要对经典粗糙集理论进行扩展。变精度粗糙集[2-3]和程度粗糙集[4-6]正是在这样的背景下应运而生。Ziarko提出了变精度粗糙集模型[2],它是Pawlak[7]粗糙集模型的扩展,基本思想是在Pawlak粗糙集模型中引入参数 $\beta(0\leqslant\beta<0.5)$,即允许一定程度的错误分类率存在,它可以解决属性间无函数关系的数据分类问题。在程度粗糙集模型中,考虑了集合 X 与等价类重叠部分的定量信息。依据概念 X 与等价类重叠的多少来刻画或近似概念。然而变精度粗糙集反映的是近似空间的相对量化信息,而程度粗糙集反映的是绝对量化信息[8],它们各有好处也各自存在弊端,并且在现实生活中概念 X 并不总是分明集。另外,经典粗糙集模型基于等价关系,然而在实际工程应用中等价关系往往不具备太大的意义,需要基于优势关系[9-10]来建立信息系统,也就是序信息系统。一些学者研究了在序信息系统下将变精度粗糙集模型与程度粗糙集模型融合起来的情况,并取得了一些成果[11]。本文在优势关系下将变精度粗糙集模型与程度粗糙集模型进行推广,并且在序信息系统中通过“逻辑与”将变精度粗糙模糊集与程度粗糙模糊集融合起来,建立了一种新的粗糙模糊集模型,从而增加对概念信息的了解,提高预测精度。

2 预备知识

下面主要介绍变精度粗糙集 $(U,\overline{R_\beta},\underline{R_\beta})$ 、程度粗糙集 $(U,\overline{R_k},\underline{R_k})$ 以及序信息系统 $S^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 的相关知识,为建立新的模型 $(U,\overline{R_{\beta\wedge k}},\underline{R_{\beta\wedge k}})$ 提供理论基础。

定义1[2-3] 设 (U,R) 为近似空间, $X\subseteq U$, $c([x]_R,X)=1-|[x]_R\cap X|/|[x]_R|$ 称为等价类 $[x]_R$ 关于集合 X 的错误分类率。设 β 为0到1的实数,称为可调错误分类水平, $1-\beta$ 称为精度。集合

$$\overline{R_\beta}X=\cup\{[x]_R:c([x]_R,X)<1-\beta\}$$

$$\underline{R_\beta}X=\cup\{[x]_R:c([x]_R,X)\leqslant\beta\}$$

分别称为 X 的精度为 $1-\beta$ 的 R 上、下近似集。若 $\overline{R_\beta}X\neq\underline{R_\beta}X$,则称 X 在精度 $1-\beta$ 下是 R 粗糙的,否则称 X 是 R 精确的。其中 $\overline{R_\beta}X$ 是“关于 X 的错误分类率小于 $1-\beta$ 的等价类”的并集, $\underline{R_\beta}X$ 是“关于 X 的错误分类率不大于 $1-\beta$ 的等价类”的并集。在变精度粗糙集模型中,参数 β 的取值范围一般在 $[0,0.5)$,也可以将参数 β 的取值范围限定在 $(0.5,1.0]$,本文为了更一般的研究,将参数 β 限定在 $[0,1.0]$ 上,其实 $\beta\in(0,0.5]$ 和 $\beta\in(0.5,1.0]$ 具有很强的对称性,一般情

况下只需研究 $\beta\in(0.5,1.0]$，而 $\beta\in(0,0.5]$ 可以类似得到。

定义2[4-5] 设 (U,R) 为近似空间，$X\subseteq U$，任取自然数 k，集合

$$\overline{R_k}X=\bigcup\{[x]_R:|[x]_R\cap X|>k\}$$

$$\underline{R_k}X=\bigcup\{[x]_R:|[x]_R|-|[x]_R\cap X|\leqslant k\}$$

分别称为 X 的程度为 k 的 R 上、下近似集。若 $\overline{R_k}X\neq\underline{R_k}X$，则称 X 在程度 k 时是 R 粗糙的，否则称 X 是 R 精确的。其中 $\overline{R_k}X$ 是“属于 X 的元素个数多于 k 个等价类”的并集，$\underline{R_k}X$ 是“最多只有 k 个元素不属于 X 的等价类”的并集。

定义3[2] 设 (U,R) 为近似空间，$\forall\tilde{A}\in F(U)$，集合

$$\underline{Apr}\tilde{A}(x)=\wedge\{\tilde{A}(y):y\in[x]\}$$

$$\overline{Apr}\tilde{A}(x)=\vee\{\tilde{A}(y):y\in[x]\}$$

分别称为 $\tilde{A}$ 的模糊下近似和模糊上近似。

定义4[13] 设 $S=(U,AT,\mathscr{F})$ 为信息系统，其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为非空有限对象集，$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为属性集，$\mathscr{F}=\{f:U\to V_a,a\in AT\}$ 是 U 与 AT 之间的关系集，V_a 为 a 的有限值域。对给定信息系统 S，如果属性 $a\in AT$ 的值域上有偏序关系“$\geq_a$”，称 a 为一个准则。$\forall x,y\in U$，$x\geq_a y$ 表示 x 至少和 y 在准则 a 下是一样好的，即 x 优于 y，$x\geq_a y\Leftrightarrow f(x,a)\geq_a f(y,a)$。对于属性集 $B\subseteq AT$，$x\geq_B y$ 表示 x 关于 B 中的所有准则都优于 y。当信息系统 S 中所有的属性都为准则时，称该信息系统为一个序信息系统，记为 $S^{\geq}=(U,AT,F)$。$\forall B\subseteq AT$，$X\subseteq U$，集合

$$R_B^{\geq}=\{(x,y)\in U\times U:f(x,a)\leqslant f(y,a),\forall a\in B\}$$

称为关于属性集 B 的优势关系，集合

$$[x]_B^{\geq}=\{y\in U:(x,y)\in R_B^{\geq}\}=\{y\in U:f(x,a)\leqslant f(y,a),\forall a\in B\}$$

称为关于属性集 B 的优势类。集合

$$\underline{R^{\geq}}(X)=\underline{R_B^{\geq}}(X)=\{x\in U:[x]_B^{\geq}\subseteq X\}$$

$$\overline{R^{\geq}}(X)=\overline{R_B^{\geq}}(X)=\{x\in U:[x]_B^{\geq}\cap X\neq\varnothing\}$$

分别称为 X 关于优势关系 $R_B^{\geq}$ 的下、上近似。若 $\underline{R_B^{\geq}}(X)\neq\overline{R_B^{\geq}}(X)$，则称 X 在序信息系统下是粗糙的，否则称 X 是精确的。

3 序信息系统下基于精度与程度“逻辑且”粗糙模糊集

前文介绍了精度粗糙集与程度粗糙集，以及序信息系统的相关知识，有了这些基本概念作为基础，现在需要定义在序信息系统下精度粗糙模糊集与程度粗糙模糊集，并且在序信息系统下通过“逻辑且”将变精度粗糙模糊集与程度粗糙模糊集融合起来，并深入讨论其性质。

设 $S^{\geq}=(U,AT,\mathscr{F})$ 为序信息系统，$\forall\tilde{X}\subseteq F(U)$，$c([x]^{\geq},\tilde{X})=1-\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{X}(y)/|[x]^{\geq}|$ 称为优势类 $[x]^{\geq}$ 关于集合 $\tilde{X}$ 的错误分类率。设 β 为0到1的实数，称为可调错误分类水平，$1-\beta$ 称为精度。

定义5 设 $S^{\geq}=(U,AT,\mathscr{F})$ 为序信息系统，$\forall\tilde{A}\in F(U)$，$R^{\geq}$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，模糊集合

$$\overline{R_\beta^{\geq}}\tilde{A}(x)=\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):c([x]^{\geq},\tilde{A})<1-\beta\}$$

$$\underline{R_\beta^{\geq}}\tilde{A}(x)=\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):c([x]^{\geq},\tilde{A})\leqslant\beta\}$$

分别称为模糊集 $\tilde{A}$ 的精度为 $1-\beta$ 的上、下近似集。若 $\overline{R_\beta^{\geq}}\tilde{A}\neq\underline{R_\beta^{\geq}}\tilde{A}$，则称 $\tilde{A}$ 在精度 $1-\beta$ 下是粗糙的，否则称 $\tilde{A}$ 是可描述的。

定义6 设 $S^{\geq}=(U,AT,\mathscr{F})$ 为序信息系统，$\forall\tilde{A}\in F(U)$，$R^{\geq}$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，模糊集合

$$\overline{R_k^{\geq}}\tilde{A}(x)=\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}$$

$$\underline{R_k^{\geq}}\tilde{A}(x)=\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):|[x]^{\geq}|-\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\leqslant k\}$$

分别称为模糊集 $\tilde{A}$ 的程度为 k 的上、下近似集。若 $\overline{R_k^{\geq}}\tilde{A}\neq\underline{R_k^{\geq}}\tilde{A}$，称 $\tilde{A}$ 在程度为 k 时是粗糙的，否则称为可描述的。

定义7 设 $S^{\geq}=(U,AT,\mathscr{F})$ 为序信息系统，$\forall\tilde{A}\in F(U)$，$R^{\geq}$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，记 $N^{0.5}=\{0.5n:n\in N\}$，$k\in N^{0.5}$，模糊集合

$$\overline{R_{\beta\wedge k}^{\geq}}\tilde{A}(x)=\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):c([x]^{\geq},\tilde{A})<1-\beta,\ \sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}$$

$$\underline{R_{\beta\wedge k}^{\geq}}\tilde{A}(x)=\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):c([x]^{\geq},\tilde{A})\leqslant\beta,\ |[x]^{\geq}|-\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\leqslant k\}$$

分别称为 $\tilde{A}$ 在序信息系统下的精度为 $1-\beta$，程度为

k 的逻辑且 $R^{\geq}$ 上近似集、下近似集。若 $\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}=\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}$，则称 $\tilde{A}$ 是可描述的，反之则是粗糙的。根据上述定义，仿照经典Pawlak粗糙集定义其他区域如下：

$$pos R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}=\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\cap\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}$$

$$neg R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}=\sim(\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\cup\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A})$$

$$Ubn R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}=\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}-\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}$$

$$Lbn R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}=\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}-\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}$$

$$bn R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}=Ubn R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}\cup Lbn R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}$$

分别称为正域、负域、上边界域、下边界域和边界域。

定理1 设 $S^{\geq}=(U,AT,\mathscr{F})$ 为序信息系统，$\forall\tilde{A}\in F(U)$，$R^{\geq}$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，$\beta\in[0,1.0]$，记 $N^{0.5}=\{0.5n:n\in N\}$，$k\in N^{0.5}$，有：

（1）$\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}=\overline{R^{\geq}_{\beta}}\tilde{A}\cap\overline{R^{\geq}_{k}}\tilde{A}$

（2）$\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}=\underline{R^{\geq}_{\beta}}\tilde{A}\cap\underline{R^{\geq}_{k}}\tilde{A}$

证明 （1）对 $\forall x\in U$：

$$(\overline{R^{\geq}_{\beta}}\tilde{A}\cap\overline{R^{\geq}_{k}}\tilde{A})(x)=\overline{R^{\geq}_{\beta}}\tilde{A}(x)\wedge\overline{R^{\geq}_{k}}\tilde{A}(x)=$$
$$[\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):c([x]^{\geq},\tilde{A})<1-\beta\}]\wedge$$
$$[\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}]=$$
$$\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):c([x]^{\geq},\tilde{A})<1-\beta,\ \sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}=$$
$$\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}(x)$$

又由 x 的任意性知：

$$\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}=\overline{R^{\geq}_{\beta}}\tilde{A}\cup\overline{R^{\geq}_{k}}\tilde{A}$$

（2）证明方法与（1）类似。 □

定理2 设 $S^{\geq}=(U,AT,\mathscr{F})$ 为序信息系统，$\forall\tilde{A}\in F(U)$，$R^{\geq}$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，$\beta\in[0,1.0]$，记 $N^{0.5}=\{0.5n:n\in N\}$，$k\in N^{0.5}$，有：

（1）$\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}=pos R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}\cup Ubn R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}$

（2）$\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}=pos R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}\cup Lbn R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}$

证明 由定义可以直接得到。 □

定理3 设 $S^{\geq}=(U,AT,\mathscr{F})$ 为序信息系统，$\forall\tilde{A}\in F(U)$，$R^{\geq}$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，$\beta\in[0,1.0]$，记 $N^{0.5}=\{0.5n:n\in N\}$，$k\in N^{0.5}$，有：

（1）$\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}(x)=\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\max(k,\beta|[x]^{\geq}|)\}$

（2）$\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}(x)=\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq\max(|[x]^{\geq}|-k,|[x]^{\geq}|-\beta|[x]^{\geq}|)\}$

证明 （1）由定义可知：

$$\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}(x)=\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\frac{\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)}{|[x]^{\geq}|}>\beta,\ \sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}$$

故有 $\frac{\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)}{|[x]^{\geq}|}>\beta$，$\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k$。从而 $\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\beta|[x]^{\geq}|$，$\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k$。即 $\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\max(k,\beta|[x]^{\geq}|)$。

（2）证明方法与（1）类似。 □

定理4 设 $S^{\geq}=(U,AT,\mathscr{F})$ 为序信息系统，$\forall\tilde{A}\in F(U)$，$R^{\geq}$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，$\beta\in[0,1.0]$，记 $N^{0.5}=\{0.5n:n\in N\}$，$k\in N^{0.5}$，有：

（1）当 $0<\beta<0.5$ 且 $k\neq0$ 时

$$pos R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):|[x]^{\geq}|\geq k/\beta,\ \sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq$$
$$|[x]^{\geq}|-k\})\vee(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):k/(1-\beta)<|[x]^{\geq}|<k/\beta,$$
$$\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq(1-\beta)|[x]^{\geq}|\})\vee(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):$$
$$|[x]^{\geq}|\leq k/(1-\beta),\ \sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\})$$

$$neg R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=1-[(\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):|[x]^{\geq}|\geq k/\beta,$$
$$\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\beta|[x]^{\geq}|\})\vee(\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):k/(1-\beta)<|[x]^{\geq}|<k/\beta,$$
$$\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\})\vee(\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):|[x]^{\geq}|\leq k/(1-\beta),$$
$$\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\})\vee(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):|[x]^{\geq}|\leq k/(1-\beta),$$
$$(1-\beta)|[x]^{\geq}|\leq\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\leq k\})]$$

$$Ubn R^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=\{[\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge[1-\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:|[x]^{\geq}|\geq k/\beta,$$
$$\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq|[x]^{\geq}|-k\}\vee(\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):|[x]^{\geq}|\geq$$
$$k/\beta,\beta|[x]^{\geq}|<\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)<|[x]^{\geq}|-k\})\vee\{[\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge$$
$$[1-\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:k/(1-\beta)<|[x]^{\geq}|<k/\beta,\ \sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq$$
$$(1-\beta)|[x]^{\geq}|\}\vee(\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):k/(1-\beta)<|[x]^{\geq}|<$$
$$k/\beta,k<\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)<(1-\beta)|[x]^{\geq}|\})\vee\{[\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge$$

$$[1-\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:\left|[x]^{\geq}\right|\leq k/(1-\beta),\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}$$

$$\begin{aligned}LbnR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=&\{[\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge[1-\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:\left|[x]^{\geq}\right|\geq k/\beta,\\&\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq\left|[x]^{\geq}\right|-k\}\vee\{[\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge[1-\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:\\&k/(1-\beta)<\left|[x]^{\geq}\right|<k/\beta,\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq(1-\beta)\left|[x]^{\geq}\right|\}\vee\\&\{[\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge[1-\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:\left|[x]^{\geq}\right|\leq k/(1-\beta),\\&\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}\vee(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\left|[x]^{\geq}\right|\leq k/(1-\beta),\\&(1-\beta)\left|[x]^{\geq}\right|\leq\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)<k\})\end{aligned}$$

（2）当 $0.5\leq\beta<1.0$ 且 $k\neq0$ 时

$$\begin{aligned}posR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=&(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\left|[x]^{\geq}\right|\geq k/(1-\beta),\\&\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq\left|[x]^{\geq}\right|-k\})\vee(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):k/\beta<\left|[x]^{\geq}\right|<\\&k/(1-\beta),\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\beta\left|[x]^{\geq}\right|\})\vee(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\\&\left|[x]^{\geq}\right|\leq k/\beta,\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}negR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=1-[&(\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\left|[x]^{\geq}\right|\geq k/(1-\beta),\\&\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\beta\left|[x]^{\geq}\right|\})\vee(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\left|[x]^{\geq}\right|\geq k/(1-\beta),\\&\left|[x]^{\geq}\right|-k\leq\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\leq\beta\left|[x]^{\geq}\right|\})\vee(\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\\&k/\beta<\left|[x]^{\geq}\right|<k/(1-\beta),\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\beta\left|[x]^{\geq}\right|\})\vee\\&(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):k/\beta<\left|[x]^{\geq}\right|<k/(1-\beta),\left|[x]^{\geq}\right|-k\leq\\&\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\leq\beta\left|[x]^{\geq}\right|\})\vee(\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\left|[x]^{\geq}\right|\leq k/\beta,\\&\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\})\vee(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\left|[x]^{\geq}\right|\leq k/\beta,\\&(1-\beta)\left|[x]^{\geq}\right|\leq\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\leq k\})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}UbnR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=&\{[\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge[1-\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:\\&\left|[x]^{\geq}\right|\leq k/\beta,\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}\vee\{[\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge\\&[1-\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:k/\beta<\left|[x]^{\geq}\right|<k/(1-\beta),\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\\&\beta\left|[x]^{\geq}\right|\}\vee\{[\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge[1-\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:\left|[x]^{\geq}\right|\geq\\&k/(1-\beta),\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq\left|[x]^{\geq}\right|-k\}\vee(\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\\&\left|[x]^{\geq}\right|\geq k/(1-\beta),\beta\left|[x]^{\geq}\right|<\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)<\left|[x]^{\geq}\right|-k\})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}LbnR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=&\{[\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge[1-\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:\left|[x]^{\geq}\right|\leq\\&k/\beta,\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}\vee\{[\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge[1-\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:\\&k/\beta<\left|[x]^{\geq}\right|<k/(1-\beta),\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\beta\left|[x]^{\geq}\right|\}\vee\\&(\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):k/\beta<\left|[x]^{\geq}\right|<k/(1-\beta),\left|[x]^{\geq}\right|-k\leq\\&\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\leq\beta\left|[x]^{\geq}\right|\})\vee\{[\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]\wedge[1-\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)]:\\&\left|[x]^{\geq}\right|\geq k/(1-\beta),\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq\left|[x]^{\geq}\right|-k\}\end{aligned}$$

证明 此处仅选取 $posR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}$ 来证明。

由 $0<\beta<0.5$ 且 $k\neq0$，可得 $\beta<1-\beta$，$k/(1-\beta)<k/\beta$。又因

$$\begin{aligned}posR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=&(\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\cap\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A})(x)=\\&\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}(x)\wedge\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}(x)\end{aligned}$$

故有

（1）当 $\left|[x]^{\geq}\right|\geq k/\beta$ 时，由定理3知：

$$\begin{aligned}(\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A})(x)=&\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\max(k,\beta\left|[x]^{\geq}\right|)\}=\\&\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y)|\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\beta\left|[x]^{\geq}\right|\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A})(x)=&\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y)|\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq\\&\max(\left|[x]^{\geq}\right|-k,\left|[x]^{\geq}\right|-\beta\left|[x]^{\geq}\right|)\}=\\&\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y)|\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq\left|[x]^{\geq}\right|-k\}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}posR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=&\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\left|[x]^{\geq}\right|\geq k/\beta,\\&\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq\left|[x]^{\geq}\right|-k\}\end{aligned}$$

（2）当 $k/(1-\beta)<\left|[x]^{\geq}\right|<k/\beta$ 时

$$\begin{aligned}(\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A})(x)=&\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y)|\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>\max(k,\beta\left|[x]^{\geq}\right|)\}=\\&\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y)|\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A})(x)=&\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y)|\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq\\&\max(\left|[x]^{\geq}\right|-k,\left|[x]^{\geq}\right|-\beta\left|[x]^{\geq}\right|)\}=\end{aligned}$$

$$\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq\left|[x]^{\geq}\right|-\beta\left|[x]^{\geq}\right|\}$$

因此

$$posR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):k/(1-\beta)<\left|[x]^{\geq}\right|<k/\beta,\ \sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq(1-\beta)\left|[x]^{\geq}\right|\}$$

(3)当 $\left|[x]^{\geq}\right|\leq k/(1-\beta)$ 时

$$(\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A})(x)=\bigvee_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}$$

$$(\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A})(x)=\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)\geq(1-\beta)\left|[x]^{\geq}\right|\}$$

因此

$$posR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}(x)=\bigwedge_{y\in[x]^{\geq}}\{\tilde{A}(y):\left|[x]^{\geq}\right|\leq k/(1-\beta),\ \sum_{y\in[x]^{\geq}}\tilde{A}(y)>k\}$$

综上 $posR^{\geq}_{\beta\wedge k}\tilde{A}$ 得证。

当 $0.5\leq\beta<1.0$ 时及其他区域可以类似得到。□

定理5 设 $S^{\geq}=(U,AT,\mathscr{F})$ 为序信息系统，$\forall\tilde{A},\tilde{B}\in F(U)$，$\alpha,\beta\in[0,1.0]$，$R^{\geq}$ 为 $S^{\geq}$ 上的优势关系，记 $N^{0.5}=\{0.5n:n\in N\}$，$k,l\in N^{0.5}$，有下列结论成立：

(1) $\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\varnothing=\varnothing$，$\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}U=U$，$\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\varnothing=\varnothing$

(2)若 $\tilde{A}\subseteq\tilde{B}$，那么 $\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\subseteq\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{B}$，$\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\subseteq\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{B}$

(3) $\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}(\tilde{A}\cup\tilde{B})\supseteq\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\cup\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{B}$

$\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}(\tilde{A}\cup\tilde{B})\supseteq\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\cup\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{B}$

(4) $\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}(\tilde{A}\cap\tilde{B})\subseteq\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\cap\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{B}$

$\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}(\tilde{A}\cap\tilde{B})\subseteq\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\cap\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{B}$

(5)若 $\beta\geq\alpha$，$k\geq l$ 时，有

$\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\subseteq\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge l}}\tilde{A}$，$\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\subseteq\overline{R^{\geq}_{\alpha\wedge k}}\tilde{A}$，$\overline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\subseteq\overline{R^{\geq}_{\alpha\wedge l}}\tilde{A}$

$\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\supseteq\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge l}}\tilde{A}$，$\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\supseteq\underline{R^{\geq}_{\alpha\wedge k}}\tilde{A}$，$\underline{R^{\geq}_{\beta\wedge k}}\tilde{A}\supseteq\underline{R^{\geq}_{\alpha\wedge l}}\tilde{A}$

证明 由定义(1)~(5)易证。□

4 案例分析

下面通过对某公司员工考核的案例分析，利用本文讨论的方法得到各个粗糙区域，并讨论从定义出发进行计算与从定理出发进行计算的优缺点以及它们分别适用于哪些情形。

设 $S^{\geq}=(U,AT,\mathscr{F})$ 是一个序信息系统，设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{20}\}$ 代表某公司的20名员工，$AT=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 分别代表知识面、沟通能力、口语交流和工作态度，$V=\{3,2,1\}$，其中3表示“优秀”，2表示“一般”，1表示“不合格”，统计数据如表1。随机抽取一部分员工作为研究对象，记为 $X=\{x_7,x_9,x_{11},x_{17},x_{19},x_{20}\}$，“精英”是一个模糊的概念。经某种方法对这6名员工属于精英的程度所做的评价依次为0.56，0.87，0.82，0.42，0.33，0.40，则以此评价构成的模糊集合 $\tilde{B}$ 记为：

$$\tilde{B}=\{(x_7,0.56),(x_9,0.87),(x_{11},0.82),(x_{17},0.42),(x_{19},0.33),(x_{20},0.40)\}$$

Table 1 Employee assessment statistics data

表1 员工考核统计数据

U	知识面	沟通能力	口语交流	工作态度
x_1	3	3	2	3
x_2	3	3	2	2
x_3	1	2	1	2
x_4	2	1	2	2
x_5	2	2	2	2
x_6	2	2	3	3
x_7	3	2	3	1
x_8	1	1	1	2
x_9	2	3	3	3
x_{10}	2	3	1	2
x_{11}	3	1	3	3
x_{12}	1	2	1	1
x_{13}	2	2	2	1
x_{14}	1	2	2	1
x_{15}	1	2	2	2
x_{16}	3	1	2	2
x_{17}	3	3	1	1
x_{18}	3	3	2	1
x_{19}	2	1	1	1
x_{20}	1	3	3	1

计算优势关系下的对象分类，不妨选取 $\beta=0.3$ 和 $k=1$，计算得到相应的 $\left|[x_i]^{\geq}\right|$、$\sum_{y\in[x_i]^{\geq}}\tilde{B}(y)$、$\sum_{y\in[x_i]^{\geq}}\tilde{B}(y)\Big/\left|[x_i]\right|^{\geq}$ 和 $\left|[x_i]^{\geq}\right|-\sum_{y\in[x_i]^{\geq}}\tilde{B}(y)$ 的值见表2。

情形1 利用定理1求解。

(1)当 $\beta=0.3$ 时

$\overline{R^{\geq}_{\beta}}\tilde{B}=\{(x_6,0.87),(x_7,0.56),(x_9,0.87),(x_{11},0.82),(x_{20},0.87)\}$

$\underline{R^{\geq}_{\beta}}\tilde{B}=\{(x_9,0.87),(x_{11},0.82)\}$

当 $k=1$ 时

$\overline{R^{\geq}_{k}}\tilde{B}=\{(x_{12},0.87),(x_{19},0.87)\}$

Table 2 Employee assessment dominant class statistics data

表2 员工考核优势类的统计数据

x_i 序号	$\lvert[x_i]^{\geq}\rvert$	$\sum_{y\in[x_i]^{\geq}}\tilde{B}(y)$	$\sum_{y\in[x_i]^{\geq}}\tilde{B}(y)/\lvert[x_i]^{\geq}\rvert$	$\lvert[x_i]^{\geq}\rvert-\sum_{y\in[x_i]^{\geq}}\tilde{B}(y)$
1	1	0	0	1.00
2	2	0	0	2.00
3	8	0.87	0.108 75	7.13
4	8	1.69	0.211 25	6.31
5	5	0.87	0.174 00	4.13
6	2	0.87	0.435 00	1.73
7	1	0.56	0.560 00	0.44
8	12	1.69	0.140 83	10.31
9	1	0.87	0.870 00	0.13
10	4	0.87	0.217 50	3.13
11	1	0.82	0.820 00	0.18
12	15	2.25	0.150 00	12.75
13	8	1.43	0.178 75	6.57
14	11	1.83	0.166 36	9.17
15	6	0.87	0.145 00	5.13
16	4	0.82	0.205 00	3.18
17	4	0.42	0.105 00	3.58
18	3	0	0	3.00
19	14	3.00	0.214 30	11.00
20	2	1.27	0.635 00	0.73

$\underline{R_k^{\geq}}\tilde{B}=\{(x_7,0.56),(x_9,0.87),(x_{11},0.82),(x_{20},0.40)\}$

(2)利用(1)所求结果以及定理1可以得到:

$\overline{R_{0.3\wedge1}^{\geq}}\tilde{B}=\varnothing$

$\underline{R_{0.3\wedge1}^{\geq}}\tilde{B}=\{(x_9,0.87),(x_{11},0.82)\}$

(3)利用(2)所求结果由定义7通过集合运算可以得到:

$posR_{0.3\wedge1}^{\geq}\tilde{B}=\varnothing$

$UbnR_{0.3\wedge1}^{\geq}\tilde{B}=\varnothing$

$LbnR_{0.3\wedge1}^{\geq}\tilde{B}=\{(x_9,0.87),(x_{11},0.82)\}$

$bnR_{0.3\wedge1}^{\geq}\tilde{B}=\{(x_9,0.87),(x_{11},0.82)\}$

$$negR_{0.3\wedge1}^{\geq}\tilde{B}=\{(x_1,1.0),(x_2,1.0),(x_3,1.0),(x_4,1.0),(x_5,1.0),(x_6,1.0),(x_7,1.0),(x_8,1.0),(x_9,0.13),(x_{10},1.0),(x_{11},0.18),(x_{12},1.0),(x_{13},1.0),(x_{14},1.0),(x_{15},1.0),(x_{16},1.0),(x_{17},1.0),(x_{18},1.0),(x_{19},1.0),(x_{20},1.0)\}$$

情形2 利用定理4求解。

由 $\beta=0.3$ ，$k=1$ 可以得到:

$k/(1-\beta)=10/7$, $k/\beta=10/3$

(1)通过计算可以得到:

$posR_{0.3\wedge1}^{\geq}\tilde{B}=\varnothing$

$$negR_{0.3\wedge1}^{\geq}\tilde{B}=\{(x_1,1.0),(x_2,1.0),(x_3,1.0),(x_4,1.0),(x_5,1.0),(x_6,1.0),(x_7,1.0),(x_8,1.0),(x_9,0.13),(x_{10},1.0),(x_{11},0.18),(x_{12},1.0),(x_{13},1.0),(x_{14},1.0),(x_{15},1.0),(x_{16},1.0),(x_{17},1.0),(x_{18},1.0),(x_{19},1.0),(x_{20},1.0)\}$$

$LbnR_{0.3\wedge1}^{\geq}\tilde{B}=\{(x_9,0.87),(x_{11},0.82)\}$

$UbnR_{0.3\wedge1}^{\geq}\tilde{B}=\varnothing$

$bnR_{0.3\wedge1}^{\geq}\tilde{B}=\{(x_9,0.87),(x_{11},0.82)\}$

(2)利用(1)所求结果及定理2可以得到:

$\overline{R_{0.3\wedge1}^{\geq}}\tilde{B}=\varnothing$

$\underline{R_{0.3\wedge1}^{\geq}}\tilde{B}=\{(x_9,0.87),(x_{11},0.82)\}$

上述两种方法求解结果是一致的,在现实生活中,可以根据需求适当地选择求解的方式。例如,如果只需要正域、负域、上边界域、下边界域以及边界域中的一种或者几种,可以选择定理求解,而只需要上、下近似的话,可以从定义出发,从而减少计算量。

5 结论

本文在序信息系统下,通过"逻辑且"的方式将精度粗糙模糊集与程度的粗糙模糊集结合起来研究,得到了其基本结构与相应的性质。利用两种方法对实例进行了分析,通过计算可以知道:通过本文的工作,可以对粗糙模糊集的区域进行更精确的刻画,从而使得在实际工程应用中可以提高预测精度。

References:

[1] Pawlak Z. Rough sets-theoretical aspects of reasoning about data[M]. Hingham, USA: Kluwer Academic Publish, 1991.

[2] Ziarko W. Variable precision rough set model[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1993, 46(1): 39-59.

[3] Zhang Wenxiu, Liang Yi, Wu Weizhi. Information system and knowledge discovery[M]. Beijing: Science Press, 2003.

[4] Yao Y Y, Lin T Y. Generalization of rough sets using model

logics[J]. Intelligent Automatic and Soft Computing, 1996, 2: 103-120.

[5] Zhang Wenxiu, Wu Weizhi, Liang Jiye, et al. Rough set theory and method[M]. Beijing: Science Press, 2001.

[6] Yao Y Y, Lin T Y. Graded rough set approximations based on nested neighborhood systems[C]//Proceeding of the 5th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing. Mainz, Aachen: Verlag, 1997: 196-200.

[7] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[8] Zhang Xianyong, Xiong Fang, Mo Zhiwen. Precision and degree of logic or rough set model[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2009, 22(5): 697-703.

[9] Dembczyński K, Pindur R, Susmaga R. Dominance-based rough set classifier without induction of decision rules[J]. Electronic Notes Theory Computer Science, 2003, 82(4): 84-95.

[10] Dembczyński K, Pindur R, Susmaga R. Generation of exhaustive set of rules within dominance-based rough set approach[J]. Electronic Notes Theory Computer Science, 2003, 82(4): 96-107.

[11] Yu Jianhang, Xu Weihua. Rough set based on logical disjunct operation of variable precision and grade in ordered information system[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2015, 9(1): 112-118.

[12] Zhang Xiaohong, Pei Daowu, Dai Jianhua. Fuzzy mathematics and the Rough set theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013.

[13] Xu Weihua. Ordered information systems and rough sets theory[M]. Beijing: Science Press, 2013.

附中文参考文献:

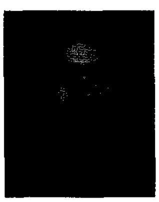
[3] 张文修, 梁怡, 吴伟志. 信息系统与知识发现[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[5] 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[11] 余建航, 徐伟华. 序信息系统下变精度与程度的“逻辑或”粗糙集[J]. 计算机科学与探索,2015,9(1): 112-118.

[12] 张小红, 裴道武, 代建华. 模糊数学与Rough集理论[M]. 北京: 清华大学出版社,2013.

[13] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京: 科学出版社, 2013.



LI Mengmeng was born in 1991. He is an M.S. candidate at Chongqing University of Technology. His research interest is the mathematical foundation of artificial intelligence.

李蒙蒙(1991—),男,河南周口人,重庆理工大学硕士研究生,主要研究领域为人工智能的数学基础。

XU Weihua was born in 1979. He received the Ph.D. degree from Xi'an Jiaotong University in 2007. Now he is the vice-dean, professor and M.S. supervisor at School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology. His research interests include artificial intelligence, fuzzy mathematics and rough set, etc.

徐伟华(1979—),男,山西浑源人,2007年于西安交通大学获得博士学位,现为重庆理工大学数学与统计学院副院长、教授、硕士生导师,主要研究领域为人工智能,模糊数学,粗糙集等。