序信息系统中基于"逻辑且"和"逻辑或"的双量化粗糙模糊集

胡 猛[1] 徐伟华[1,2]
(重庆理工大学数学与统计学院 重庆 400054)[1]
(南京理工大学高维信息智能感知与系统教育部重点实验室 南京 210094)[2]

摘 要 基于"逻辑且"和"逻辑或"两个逻辑算子在序信息系统中建立了一种双量化粗糙模糊集模型,克服了传统"逻辑且"和"逻辑或"粗糙模集模型不能解决模糊对象的问题,使得变精度与程度粗糙集具有更广的应用价值。最后通过超市评价进行案例分析,进一步阐述了研究双量化粗糙模糊集的意义。

关键词 程度粗糙集,模糊粗糙集,序信息系统,变精度粗糙集
中图法分类号 TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.1.023

Double Quantitative Rough Fuzzy Set Model Based on Logical And Operator and Logical Disjunct Operator in Ordered Information System

HU Meng[1] XU Wei-hua[1,2]
(School of Mathematics and Statistics,Chongqing University of Technology,Chongqing 400054,China)[1]
(Key Laboratory of Intelligent Perception and Systems for High-Dimensional Information of Ministry of Education, Nanjing University of Science and Technology,Nanjing 210094,China)[2]

Abstract A novel rough set model,called double quantitative rough fuzzy set model,was established based on the "logical and operator" and "logical disjunct operator" in ordered information system. It overcomes fuzzy problems which cannot be solved by using traditional "logical and operator" and "logical disjunct operatror" rough model. Some important properties were presented,and significance of the model was shown by the supermarket case study.

Keywords Graded rough set,Fuzzy rough set,Ordered information system,Variable precision rough set

1 引言

1965年Zadeh基于二值逻辑的康托尔集创造性地提出了模糊集合的概念[1],为人们处理模糊的事物提供了理论依据。粗糙集理论由波兰科学院院士、华沙理工大学教授Pawlak于1982年提出,是一种处理不确定性事物的新型工具[2]。模糊集合和粗糙集合的相关理论为人类给机器赋予智能提供了理论依据。随着计算机技术的不断发展,人类对不确定性事物有了新的认识,经典粗糙集已经不满足人们处理某些事物的要求。此时专家学者提出了变精度和程度粗糙集两类重要的粗糙集模型[3-5],并推广了经典的粗糙集。变精度和程度粗糙集分别从相对量化和绝对量化意义出发,它们的组合已有大量研究成果[6-11]。四川师范大学张贤勇博士研究了变精度与程度粗糙集的逻辑合,提出了精度与程度"逻辑且"和"逻辑或"粗糙集模型[12]。但生活中大部分的关系并不是等价关系,所以实际应用以优势关系居多,因此一些学者将传统的等价关系推广到优势关系上去,并取得了一些成果[13]。无论是等价关系还是优势关系,所做的工作一般都是将理论建立在清晰的概念上,本文在优势关系下,将精度粗糙集与程度粗糙集通过"逻辑且"和"逻辑或"组合,建立了一个研究模糊概念的双量化的粗糙模糊集模型,并深入讨论了其数学性质,最后通过超市评价案例分析了模糊概念下的双量化粗糙集的应用价值。

2 预备知识

本节简要回顾变精度粗糙集、程度粗糙集、粗糙模糊集以及序信息系统的相关基本知识。

定义 1[9,13] 设S是一个集合,$|S|$表示集合S的基数,设(U,R)为近似空间,$A\subseteq U$。$c([x]_R,A)=1-\frac{|[x]_R\cap A|}{|[x]_R|}$称为等价类$[x]_R$关于集合$A$的错误分类率。

$\overline{R_\beta}A=\cup\{[x]_R\mid c([x]_R,A)<1-\beta\}$,$\underline{R_\beta}A=\cup\{[x]_R\mid c([x]_R,A)\leqslant\beta\}$分别称为$A$的精度$1-\beta$的$R$上、下近似。其中$\beta$为0到1之间的实数,称为可调错误水平,$1-\beta$称为精度。如果$\overline{R_\beta}A\neq\underline{R_\beta}A$,则称$A$依精度$1-\beta$是$R$粗糙的,否则是$R$精确的。

到稿日期:2015-03-17 返修日期:2015-06-14 本文受国家自然科学基金项目(61472463,61402064),重庆市自然科学基金项目(cstc2013jcyjA40051),南京理工大学高维信息智能感知与系统教育部重点实验室基金项目(30920140122006),重庆市教委科技项目(KJ1500941),重庆理工大学研究生创新基金项目(YCX2014236),重庆市研究生科研创新基金项目(CYS15223)资助。
胡 猛(1991-),男,硕士,主要研究方向为人工智能的数学基础;**徐伟华**(1979-),男,博士,教授,硕士生导师,主要研究方向为粗糙集理论与应用、不确定性推理,E-mail:chxuwh@gmail.com(通信作者)。

定义 2[8,11]　设(U,R)为近似空间，集合$A\subseteq U$，则$\overline{R_k}A=\cup\{[x]_R \mid |[x]_R\cap A|>k\}$，$\underline{R_k}A=\cup\{[x]_R \mid |[x]_R|-|[x]_R\cap A|\leqslant k\}$分别称为$A$的程度$k$的$R$上、下近似。其中$k$为自然数或0，称为程度。如果$\overline{R_k}A\neq\underline{R_k}A$，则称$A$依程度$k$是$R$粗糙的，否则是$R$精确的。

定义 3[14]（粗糙模糊集）　设(U,R)为近似空间，A为论域U上的一个模糊集，定义模糊集$\underline{Apr}A$和$\overline{Apr}A$分别为A的模糊上近似和模糊下近似：

$$\underline{Apr}A(x)=\wedge\{A(y)\mid y\in[x]\}$$

$$\overline{Apr}A(x)=\vee\{A(y)\mid y\in[x]\}$$

若模糊集A满足$\underline{Apr}A(x)\neq\overline{Apr}A(x)$，则称$A$为粗糙模糊集。

一般地称三元组$I=(U,AT,F)$为信息系统[15]，其中$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是有限对象集；$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$是有限条件属性集；$F=\{f\mid U\rightarrow V_a,a\in AT\}$是$U$与$AT$的关系集，$V_a$为$a$的有限值域。属性$a\in AT$是一个准则，在$a$的值域上建立偏序关系“$\geqslant_a$”，$x_i,x_j\in U$，则$x_j\geqslant_a x_i$表示对象$x_j$关于准则$a$优于对象$x_i$，即对象$x_i$关于准则$a$和对象至多一样好。对于准则集$A\subseteq AT$，定义$x_j\geqslant_A x_i\Leftrightarrow[\forall a\in A,x_j\geqslant_a x_i]$，对象$x_j$关于准则集$A$优于对象$x_i$，即对象$x_i$关于$A$中所有的准则和$x_j$至多一样好，记$R_A^{\geqslant}=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid x_j\geqslant_a x_i,\forall a\in A\}$，称$R_A^{\geqslant}$为准则集$A$对应的优势关系。$[x]_A^{\geqslant}$表示对象集$U$中关于准则集$A$优于对象$x$的全体对象构成的集合，称其为$x$关于优势关系$R_A^{\geqslant}$的优势类。论域$U$中全体优势类构成$U$的一个覆盖。当把信息系统$I$的属性集$AT$作为准则时，称信息系统$I$是一个序信息系统，记为$I^{\geqslant}=(U,AT,F)$。

3　序信息系统中基于“逻辑且”和“逻辑或”的双量化粗糙模糊集

前面介绍的精度和程度两类粗糙集都是在分明的近似空间中，对论域的分明子集做近似计算。下面将在序信息系统中，在论域的模糊子集上定义基于精度与程度“逻辑且”和“逻辑或”的粗糙模糊集。将变精度粗糙模糊集和程度粗糙模糊集结合起来讨论，得到一种新的模型，并深入讨论该模型的性质。

定义 4　设$I^{\geqslant}=(U,AT,F)$为序信息系统，对$\forall\widetilde{X}\in F(U)$，$R^{\geqslant}$为信息系统$I^{\geqslant}$上的优势关系，$[x]_R^{\geqslant}$为对象$x$关于优势关系$R^{\geqslant}$的优势类，则

$$c([x]_R^{\geqslant},\widetilde{X})=1-\sum_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)/|[x]_R^{\geqslant}|$$

称为优势类$[x]_R^{\geqslant}$关于模糊集合$\widetilde{X}$的错误分类率。

定义 5　设$I^{\geqslant}=(U,AT,F)$为序信息系统，$R^{\geqslant}$为信息系统$I^{\geqslant}$上的优势关系，对论域U上的任意一个模糊集$\widetilde{X}\in F(U)$，设$\forall x\in U$，$\beta\in[0,1]$，$N^{0.5}=\{0.5n\mid n\in N\}$，$k\in N^{0.5}$，记：$\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)=\bigvee_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)\mid c([x]_R^{\geqslant},\widetilde{X})<1-\beta$且$\sum_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>k\}$，$\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)=\bigwedge_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)\mid c([x]_R^{\geqslant},\widetilde{X})\leqslant\beta$或$|[x]_R^{\geqslant}|-\sum_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)\leqslant k\}$分别是模糊集$\widetilde{X}$在序信息系统下精度为$1-\beta$、程度为$k$的基于“逻辑且”和“逻辑或”的上近似集和下近似集。因为β在$[0,0.5]$和$[0.5,1]$具有较好的对称性[13]，所以本文主要讨论$[0,0.5]$，而$[0.5,1]$的相关结论可以类似得到。对应地，称$\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}$和$\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}$为模糊上近似算子和模糊下近似算子。与经典的粗糙集类似，如果$\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}\equiv\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}$，则称$\widetilde{X}$为可描述的，反之则是粗糙的。通过Pawlak粗糙集的定义，我们可以定义粗糙模糊集正域、负域、上边界域、下边界域和边界域。其中：$posR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}=\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}\cap\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}$，$negR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}X=\sim(\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}\cup\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X})$，$UbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}X=\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}\cap\sim\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}$，$LbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}X=\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}\cap\sim\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}$，$bnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}X=UbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}\cup LbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}$分别称为正域、负域、上边界域、下边界域和边界域。

值得说明的是，上近似采用“逻辑且”、下近似采用“逻辑或”所建立的扩展模型是一个“下近似集膨胀”并且“上近似集缩小”的模型，所以该模型恰好能够将边界域缩小，从而减少不确定性区域。而与之对应的“逻辑或”和“逻辑且”是从“下近似集缩小”、“上近似集扩大”的方向进行扩张，所以“逻辑或”和“逻辑且”模型不满足良性扩张[3]，因此本文不对其讨论。

定理 1　设$I^{\geqslant}=(U,AT,F)$为序信息系统，$R^{\geqslant}$为信息系统$I^{\geqslant}$上的优势关系，对论域U上的任意一个模糊集$\widetilde{X}\in F(U)$，$\beta\in[0,1]$，$N^{0.5}=\{0.5n\mid n\in N\}$，$k\in N^{0.5}$，有：

$$\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}=\overline{R_{\beta}^{\geqslant}}\widetilde{X}\cap\overline{R_k^{\geqslant}}\widetilde{X}$$

$$\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}=\underline{R_{\beta}^{\geqslant}}\widetilde{X}\cup\underline{R_k^{\geqslant}}\widetilde{X}$$

证明：对$\forall x\in U$，若$c([x]_R^{\geqslant},\widetilde{X})<1-\beta$，则$\overline{R_{\beta}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)=\bigvee_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)\mid c([x]_R^{\geqslant},\widetilde{X})<1-\beta\}$，否则$\overline{R_{\beta}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)=0$，若$\sum_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>k$，则$\overline{R_k^{\geqslant}}\widetilde{X}=\bigvee_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)\mid\sum_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>k\}$，否则$\overline{R_k^{\geqslant}}\widetilde{X}=0$。所以若$c([x]_R^{\geqslant},\widetilde{X})<1-\beta$和$\sum_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>k$有一个不成立，则$\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)=0$，而$\overline{R_{\beta}^{\geqslant}}\widetilde{X}\cap\overline{R_k^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)=0$；如果两个条件都成立，则显然$\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)=\overline{R_{\beta}^{\geqslant}}\widetilde{X}\cap\overline{R_k^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)$，即$\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}=\overline{R_{\beta}^{\geqslant}}\widetilde{X}\cap\overline{R_k^{\geqslant}}\widetilde{X}$，类似地，可证明$\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}=\underline{R_{\beta}^{\geqslant}}\widetilde{X}\cup\underline{R_k^{\geqslant}}\widetilde{X}$。

定理 2　设$I^{\geqslant}=(U,AT,F)$为序信息系统，$R^{\geqslant}$为信息系统$I^{\geqslant}$上的优势关系，对论域U上的任意一个模糊集$\widetilde{X}\in F(U)$，$\beta\in[0,1]$，$N^{0.5}=\{0.5n\mid n\in N\}$，$k\in N^{0.5}$，有：

$$\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}=posR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}\cup UbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}$$

$$\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}=posR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}\cup LbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}$$

证明：1)对$\forall x\in U$，

$$\begin{aligned}&(posR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}\cup UbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X})(x)\\&=posR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}(x)\vee UbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}(x)\\&=(\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)\wedge\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x))\vee(\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)\wedge(1-\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)))\\&=\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)\end{aligned}$$

2)对$\forall x\in U$，

$$\begin{aligned}&(posR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}\cup LbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X})(x)\\&=posR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}(x)\vee LbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}(x)\\&=(\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)\wedge\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x))\vee(\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)\wedge(1-\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)))\\&=\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}(x)\end{aligned}$$

所以可得：

$\overline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}=posR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}\cup UbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}$与$\underline{R_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}}\widetilde{X}=posR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}\cup LbnR_{\beta\wedge\vee k}^{\geqslant}\widetilde{X}$成立。

定理 3 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 为序信息系统，$R^{\geqslant}$ 为信息系统 $I^{\geqslant}$ 上的优势关系，对论域 U 上的任意一个模糊集 $\widetilde{X}\in F(U)$，$\forall x\in U,\beta\in[0,1]$，$N^{0.5}=\{0.5n|n\in N\}$，$k\in N^{0.5}$，有：

(1)$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}(x)=\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>\max(k,\beta|[x]_R^{\geqslant}|)\}$；

(2)$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}(x)=\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)\geqslant\min(|[x]_R^{\geqslant}|-k,(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|)\}$。

证明：(1) 设 $\forall x\in U$，由定义可得：$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}(x)=\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|c([x]_R^{\geqslant},\widetilde{X})<1-\beta$ 且 $\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>k\}$，又由 $c([x]_R^{\geqslant},\widetilde{X})=1-\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)/|[x]_R^{\geqslant}|<1-\beta$，有 $-\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)/|[x]_R^{\geqslant}|<-\beta$，即 $\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)/|[x]_R^{\geqslant}|>\beta$，也即 $\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>\max(k,\beta|[x]_R^{\geqslant}|)$。

(2)同(1)的证明类似，这里不再叙述。

定理 4 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 为序信息系统，$R^{\geqslant}$ 为信息系统 $I^{\geqslant}$ 上的优势关系，对论域 U 上的任意一个模糊集 $\widetilde{X}\in F(U)$，$\forall x\in U,\beta\in[0,1]$，$N^{0.5}=\{0.5n|n\in N\}$，$k\in N^{0.5}$，有以下结论成立：

(1)当 $0<\beta<0.5$ 且 $k\neq0$ 时，有

$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}\widetilde{X}(x)=(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|\frac{k}{\beta}\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)\geqslant(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\})\vee(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|2k<|[x]_R^{\geqslant}|<\frac{k}{\beta},\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>|[x]_R^{\geqslant}|-k\})\vee(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|2k\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>k\})$；$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}\widetilde{X}(x)=(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|\frac{k}{\beta}\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>\beta|[x]_R^{\geqslant}|\})\vee(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|\frac{k}{\beta}>|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>k\})\vee(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|2k\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|-k\leqslant\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)\leqslant k\})$；$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X(x)=(\{(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))\wedge(1-\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))|\frac{k}{\beta}\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\geqslant(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\})\vee(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|\frac{k}{\beta}\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\beta|[x]_R^{\geqslant}|<\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)<(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\})\vee(\{(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))\wedge(1-\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))|2k<|[x]_R^{\geqslant}|<k/\beta,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|-k\})\vee(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|2k<|[x]_R^{\geqslant}|<k/\beta,k<\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)<|[x]_R^{\geqslant}|-k\})\vee(\{(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))\wedge(1-\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))|2k\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)>k\})$；$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X(x)=(\{(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))\wedge(1-\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))|k/\beta\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\geqslant(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\})\vee(\{(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))\wedge(1-\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))|2k<|[x]_R^{\geqslant}|<\frac{k}{\beta},\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|-k\})\vee(\{(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))\wedge(1-\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))|2k\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)>k\})\vee(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|2k\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|-k\leqslant\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\leqslant k\})$。

(2)当 $0.5\leqslant\beta<1$ 且 $k\neq0$ 时，有

$posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X(x)=(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|\frac{k}{\beta}\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)>\beta\})\vee(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|\frac{k}{\beta}>|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>k\})$；$negR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X(x)=1-(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|k/\beta\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)>\beta|[x]_R^{\geqslant}|\})\vee(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|k/\beta\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)<\beta|[x]_R^{\geqslant}|\})\vee(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|,k/\beta>|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)>k\})\vee(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|k/\beta>|[x]_R^{\geqslant}|,(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|-k\leqslant\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\leqslant k\})$；$UbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X(x)=(\{(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))\wedge(1-\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))|k/\beta\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)>\beta|[x]_R^{\geqslant}|\})\vee(\{(\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))\wedge(1-\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))|k/\beta>|[x]_R^{\geqslant}|,\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)>k)$；$LbnR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X(x)=(\{(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))\wedge(1-\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))|k/\beta\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,\beta|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\})\vee(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|k/\beta\leqslant|[x]_R^{\geqslant}|,(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\leqslant\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\leqslant\beta|[x]_R^{\geqslant}|\})\vee(\{(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))\wedge(1-\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y))|k/\beta>|[x]_R^{\geqslant}|,k<y\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\})\vee(\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|k/\beta>|[x]_R^{\geqslant}|,|[x]_R^{\geqslant}|-k\leqslant\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)\leqslant k\})$。

证明：当 $0<\beta<0.5$ 且 $k\neq0$，那么：

(1)当 $k<\beta|[x]_R^{\geqslant}|$ 时，由定理 3 知，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}(x)=\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>\beta|[x]_R^{\geqslant}|\}$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}(x)=\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)\geqslant(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\}$，而 $0<\beta<0.5$，所以 $\beta<(1-\beta)$，则 $posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X(x)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X(x)\wedge\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X(x)=\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\geqslant(1-\beta)|[x]_R^{\geqslant}|\}$。

(2) 当 $k\geqslant\beta|[x]_R^{\geqslant}|$ 时，同样地由定理 3 知 $\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}(x)=\bigvee\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>k\}$，$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}(x)=\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{\widetilde{X}(y)|\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|-k\}$。

a)如果 $|[x]_R^{\geqslant}|>2k$，那么 $|[x]_R^{\geqslant}|-k>k$，有 $\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|-k\Rightarrow\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)>k$，所以 $posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X(x)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X(x)\wedge\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X(x)=\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}X(y)\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|-k\}$；

b)如果 $|[x]_R^{\geqslant}|>2k$，那么 $|[x]_R^{\geqslant}|-k\leqslant k$，有 $\sum\limits_{u\in[x]_R^{\geqslant}}X(u)>k\Rightarrow\sum\limits_{u\in[x]_R^{\geqslant}}X(u)\geqslant|[x]_R^{\geqslant}|-k$，所以 $posR^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}X(x)=\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X(x)\wedge\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X(x)=\bigwedge\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\{X(y)|\sum\limits_{y\in[x]_R^{\geqslant}}\widetilde{X}(y)>k\}$。

其他对应的区域以及当 $0.5\leqslant\beta<1$ 且 $k\neq0$ 时，可以类似地得到。

定理 5 设 $I^{\geqslant}=(U,AT,F)$ 为序信息系统，对论域 U 上的任意两个模糊集 $\widetilde{X}$、$\widetilde{Y}\in F(U)$，$\forall x\in U$，α、$\beta\in[0,1]$，$N^{0.5}=\{0.5n|n\in N\}$，k、$l\in N^{0.5}$，有以下结论成立。

$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}(x)=\bigvee_{y\in[x]^{\geqslant}_{R}}\{\widetilde{X}(y)\mid c([x]^{\geqslant}_{R},\widetilde{X})<1-\beta,\ \sum_{y\in[x]^{\geqslant}_{R}}\widetilde{X}(y)>k\}$

$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}(x)=\bigwedge_{y\in[x]^{\geqslant}_{R}}\{\widetilde{X}(y)\mid c([x]^{\geqslant}_{R},\widetilde{X})\leqslant\beta$ 或 $|[x]^{\geqslant}_{R}|-\sum_{y\in[x]^{\geqslant}_{R}}\widetilde{X}(y)\leqslant k\}$

(1)$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\varnothing=\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\varnothing=\varnothing,\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}U=U$；

当 $\beta=1$ 时，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}U=\varnothing$；

当 $\beta\neq1$ 时，$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}U(x)=\bigvee_{y\in[x]^{\geqslant}_{R}}\{U(y)\mid |[x]^{\geqslant}_{R}|>k\}$；

(2)若 $\widetilde{X}\subseteq\widetilde{Y}$，那么$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y},\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}$；

(3)$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cup\widetilde{Y})\supseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\cup\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}$，

$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cup\widetilde{Y})\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\cup\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}$；

(4)$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cap\widetilde{Y})\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\cap\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}$，

$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cap\widetilde{Y})\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\cap\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}$；

(5)若 $\beta\geqslant\alpha,k\geqslant l$ 时，有

$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee l}}X,\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge\vee k}}X$，

$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge\vee l}}\widetilde{X},\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee l}}X$，

$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}X\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge\vee k}}X,\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\alpha\wedge\vee l}}\widetilde{X}$。

证明：(1)，(2)，(5)易证。

(3)，显然 $\widetilde{X}\subseteq\widetilde{X}\cup\widetilde{Y}$，那么由定理 2 得$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cup\widetilde{Y})$，同理可得$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cup\widetilde{Y})$，所以$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\cup\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cup\widetilde{Y})$；用类似的方法可以证明$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cup\widetilde{Y})\supseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\cup\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}$ 成立。

(4)，显然 $\widetilde{X}\supseteq\widetilde{X}\cap\widetilde{Y}$，那么由定理 2 得$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\supseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cap\widetilde{Y})$，同理可得$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}\supseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cap\widetilde{Y})$，所以$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cap\widetilde{Y})\subseteq\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\cap\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}$；用类似的方法可以证明$\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}(\widetilde{X}\cap\widetilde{Y})\subseteq\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}\cap\underline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{Y}$。

4 案例分析

前面定义了序信息系统下精度与程度“逻辑且”和“逻辑或”粗糙模糊集，并讨论了其性质。下面将对超市案例进行分析，并讨论从定义出发进行计算与从定理出发进行计算的优缺点以及它们分别适用于哪些情形。

表 1 超市数据统计

U	质量	价格	服务	售后
x_1	3	3	2	3
x_2	3	3	2	2
x_3	1	2	1	2
x_4	2	1	2	2
x_5	2	2	2	2
x_6	2	2	3	3
x_7	3	2	3	1
x_8	1	1	1	2
x_9	2	3	3	3
x_{10}	2	3	1	2
x_{11}	3	1	3	3
x_{12}	1	2	1	1
x_{13}	2	2	2	1
x_{14}	1	2	2	1
x_{15}	1	2	2	2
x_{16}	3	1	2	2
x_{17}	3	3	1	1
x_{18}	3	3	2	1
x_{19}	2	1	1	1
x_{20}	1	3	3	1

设 $I^{\geqslant}=(U,AT,V,F)$是一个序信息系统，论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{20}\}$表示某城市的 20 个超市，属性集 $AT=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$分别表示商品质量、商品价格、服务态度和售后，有限值域 $V=\{3,2,1\}$，其中 1 表示“不好”，2 表示“一般”，3 表示“好”，数据统计如表 1 所列。

首先将属性集 AT 的全部属性作为准则集，然后计算出基于优势关系 $R^{\geqslant}$ 下的全体优势类，并算出每个优势类的个数，不妨取精度 $\beta=0.3$，程度 $k=1$，取一个模糊集合优秀超市 $X=\{(x_1,0.82),(x_7,0.76),(x_9,0.85),(x_{11},0.63),(x_{18},0.73),(x_{19},0.45),(x_{20},0.47)\}$，通过相应的计算可以得到 $|[x_i]^{\geqslant}_{R}|$、$\sum_{y\in[x_i]^{\geqslant}_{R}}\widetilde{X}(y)$以及 $c([x_i]^{\geqslant}_{R},\widetilde{X})$和$|[x_i]^{\geqslant}_{R}|-\sum_{y\in[x_i]^{\geqslant}_{R}}\widetilde{X}(y)$，如表 2 所列。

表 2 超市优势类的计算数据

序号	$\lvert[x_i]^{\geqslant}_{R}\rvert$	$\sum_{y\in[x_i]^{\geqslant}_{R}}\widetilde{X}(y)$	$c([x_i]^{\geqslant}_{R},\widetilde{X})$	$\lvert[x_i]^{\geqslant}_{R}\rvert-\sum_{y\in[x_i]^{\geqslant}_{R}}\widetilde{X}(y)$
1	1	0.82	0.180	0.18
2	2	0.82	0.590	1.18
3	8	1.67	0.791	6.33
4	8	2.30	0.712	5.70
5	5	1.67	0.666	3.33
6	2	0.85	0.575	1.15
7	1	0.76	0.240	0.24
8	12	2.30	0.808	9.70
9	1	0.85	0.150	0.15
10	4	1.67	0.582	2.33
11	1	0.63	0.370	0.37
12	15	3.63	0.758	11.37
13	8	3.16	0.605	4.84
14	11	3.63	0.670	7.37
15	6	1.67	0.721	4.33
16	4	1.45	0.637	2.55
17	4	1.55	0.612	2.45
18	3	1.55	0.483	1.45
19	14	4.24	0.697	9.76
20	2	1.32	0.340	0.68

方法 1 由定义求解

(1)当 $\beta=0.3$ 时

$\overline{R^{\geqslant}_{\beta}}X=\{(x_1,0.82),(x_2,0.82),(x_5,0.85),(x_6,0.85),(x_7,0.76),(x_9,0.85),(x_{10},0.85),(x_{11},0.63),(x_{13},0.85),(x_{14},0.85),(x_{16},0.82),(x_{17},0.82),(x_{18},0.82),(x_{19},0.85),(x_{20},0.85)\}$

$\underline{R^{\geqslant}_{\beta}}\widetilde{X}=\{(x_1,0.82),(x_7,0.76),(x_9,0.85)\}$

当 $k=1$ 时，

$\overline{R^{\geqslant}_{k}}\widetilde{X}=\{(x_4,0.85),(x_8,0.85),(x_{10},0.85),(x_{12},0.85),(x_{13},0.85),(x_{14},0.85),(x_{19},0.85)\}$

$\underline{R^{\geqslant}_{k}}\widetilde{X}=\{(x_1,0.82),(x_7,0.76),(x_9,0.85),(x_{11},0.63),(x_{20},0.47)\}$

(2)利用(1)所求结果以及定理 3 中(1)可以得到：

$\overline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}}X=\{(x_{13},0.85),(x_{14},0.85),(x_{19},0.85)\}$

$\underline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}}\widetilde{X}=\{(x_1,0.82),(x_7,0.7),(x_9,0.85),(x_{11},0.63),(x_{20},0.47)\}$

(3)根据定义 5 利用(2)所求结果通过集合运算得到：

$negR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}X=\{(x_1,0.18),(x_2,1),(x_3,1),(x_4,1),(x_5,1),(x_6,1),(x_7,0.24),(x_8,1),(x_9,0.15),(x_{10},1),(x_{11},0.37),(x_{12},1),(x_{13},0.15),(x_{14},0.15),(x_{15},1),(x_{16},1),(x_{17},1),(x_{18},1),(x_{19},0.15),(x_{20},0.15)\}$

$posR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}\widetilde{X}=\varnothing$

$UbnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}X=\{(x_{13},0.85),(x_{14},0.85),(x_{19},0.85)\}$

$LbnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}X=\{(x_1,0.82),(x_7,0.76),(x_9,0.85),(x_{11},0.63),(x_{20},0.47)\}$

$bnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}X=\{(x_1,0.82),(x_7,0.76),(x_9,0.85),(x_{11},0.63),(x_{13},0.85),(x_{14},0.85),(x_{19},0.85),(x_{20},0.47)\}$

方法 2 由定理 4 求解

(1)由 $\beta=0.3$,$k=1$ 可以得到 $k/(1-\beta)=10/7$,$k/\beta=10/3$,计算结果如下:

$posR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}\widetilde{X}=\emptyset$

$negR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}\widetilde{X}=\{(x_1,0.18),(x_2,1),(x_3,1),(x_4,1),(x_5,1),(x_6,1),(x_7,0.24),(x_8,1),(x_9,0.15),(x_{10},1),(x_{11},0.37),(x_{12},1),(x_{13},0.15),(x_{14},0.15),(x_{15},1),(x_{16},1),(x_{17},1),(x_{18},1),(x_{19},0.15),(x_{20},0.15)\}$

$UbnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}\widetilde{X}=\{(x_{13},0.85),(x_{14},0.85),(x_{19},0.85)\}$

$LbnR^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}\widetilde{X}=\{(x_1,0.82),(x_7,0.76),(x_9,0.85),(x_{11},0.63),(x_{20},0.47)\}$

(2)利用(1)所求结果及定理 2 可以计算得到:

$\overline{R^{\geqslant}_{\beta\wedge\vee k}}\widetilde{X}=\{(x_{13},0.85),(x_{14},0.85),(x_{19},0.85)\}$

$\underline{R^{\geqslant}_{0.3\wedge\vee1}}\widetilde{X}=\{(x_1,0.82),(x_7,0.76),(x_9,0.85),(x_{11},0.63),(x_{20},0.47)\}$

由上述可知,两种结果是一致的,但是其求解过程却不一样,所以可以通过定义的方式进行求解,也可以利用定理 4 进行求解。在实际的工程应用中可以根据掌握的数据类型,适当地选择求解的方式,也可以根据需求选择求解方式,例如,若只需求解正域、负域、左边界域、右边界域以及边界域中的一种或者几种,则可以选择定理求解,而无需求解上、下近似;如果只需求解上、下近似,则可以从定义出发,以减少计算的步骤。

结束语 本文在序信息系统下,在分明的近似空间中,以模糊概念为背景,将变精度与程度"逻辑且"和"逻辑或"融合起来,建立了一种新的粗糙模糊集模型,然后深入研究了该模型的基本性质;最后通过对实际案例的计算,比较了通过定义进行计算和通过定理进行计算的优缺点,在实际的工程应用中,可以按需求选择适合的计算方法,从而减少计算步骤,达到高效计算的目的。

参 考 文 献

[1] Zadeh L A. Fuzzy Sets and Information Granularity[J]. Advances in Fuzzy Set Theory & Application,1996:3-18

[2] Pawlak Z. Rough Sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11(5):341-356

[3] Zhang Xian-yong. Study on several rough set models and their algorithmsbased on logical combinations of precision and grade [D]. Chengdu:Sichuan Normal University,2011(in Chinese)
张贤勇. 基于精度与程度逻辑组合的几类粗糙集模型及其算法研究[D]. 成都:四川师范大学,2011

[4] Zhang Xian-yong,Xiong Fang,Mo Zhi-wen. Properties of Approximation Operators of Logical Difference Operation of Grade and Precision[J]. Mathematics in Practice and Theory,2011,18(41):209-213

[5] Zhang Xian-yong,Mo Zhi-wen,Xiong Fang,et al. Comparative study of variable precision rough set model and graded rough set model[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2012,53(1):104-116

[6] Zhang Xian-yong,Miao Duo-qian. Two basic double-quantitative rough set models of precision and grade and their investigation using granular computing [J]. International Journal of Approximate Reasoning,2013,54(8):1130-1148

[7] Yu Jiang-huang,Xu Wei-hua. Rough Set Based on Logical Disjunctperation of Variable Precision and Grade in Ordered Information System[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology,2015,9(1):112-118 (in Chinese)
余建航,徐伟华. 序信息系统下变精度与程度的"逻辑或"粗糙集[J]. 计算机科学与探索,2015,9(1):112-118

[8] Yao Y Y, Lin T Y. Generalization of rough sets using modal logics[J]. Intelligent Automatic and Soft Computing,1996,2:103-120

[9] Zhang W X,Wu W Z,Liang J Y,et al. Rough set theory and method [M]. Beijing:Science press,2001 (in Chinese)
张文修,吴伟志,梁吉业,等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2001

[10] An A,Shan N,Chan C,et al. Discovering rules for water demand prediction:an enhanced rough-set approach[J]. Engineering Application of Artificial Intelligence,1996,9:645-653

[11] Xu Wei-hua, Liu Shi-hu, Wang Qiao-rong. The First Type of Grade Rough Set Based on Rough Membership Function[C]// 2010 Seventh International Conference System and Knowledge Discovery(FSKD2010). 2010:1922-1926

[12] Zhang Xian-yong,Xiong Fang,Mo Zhi-wen. Rought Set Model Based on Logical Or Operation of Precision and Grade[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence,2009,17(9):151-155(in Chinese)
张贤勇,熊方,莫志文. 精度与程度的逻辑或粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能,2009,17(9):151-155

[13] Ziarko W. Variable precision rough set model [J]. Journal of Computer and System Sciences,1993,46(1):39-59

[14] Dubois D,Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems,1990,17:191-209

[15] Xu Wei-hua. Ordered information system and rough set[M]. Beijing:Science press,2013(in Chinese)
徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京:科学出版社,2013

(上接第 97 页)

[12] Kong W Z,Liu Y Q,Zhang M,et al. Answer quality analysis on community question answering[J]. Journal of Chinese Information Processing,2011(1):3-8(in Chinese)
孔维泽,刘奕群,张敏,等. 问答社区中回答质量的评价方法研究[J]. 中文信息学报,2011(1):3-8

[13] Yang H T,Wang J,Ling H F. Question sentence similarity computing based on multi-features fusion in community question answering[J]. Journal of Jiangxi Normal University,2013,37(2):125-129(in Chinese)
杨海天,王健,林鸿飞. 基于特征融合的社区问答问句相似度计算[J]. 江西师范大学学报,2013,37(2):125-129

[14] Zhou Z M. The study of models and features for non-factoid question answering[D]. Shanghai:East China Normal University,2012(in Chinese)
周志敏. 非事实类问题问答模型和特征的研究[D]. 上海:华东师范大学,2012