文章编号:1001-7402(2021)06-0028-08

优势关系下带属性权重模糊决策表的部分一致约简*

冉钦文，徐伟华

(西南大学 人工智能学院，重庆　400715)

摘　要:在现实生活中很多信息表是基于优势关系的，同时信息表中每个样本的属性值是模糊数，并且对不同的属性的重视程度也是不完全相同的，即对于不一样的属性存在着不一样的权重。针对这一情况，本文借鉴了直觉模糊序表的权重函数的想法，建立了一种在条件属性集上的权重函数，并给出了不协调的带属性权重的模糊序决策表。然后，在该决策表中定义部分一致函数和部分一致协调集，并利用部分一致可辨识矩阵的方法得到部分一致约简。最后，通过案例分析该方法的有效性。

关键词:部分一致约简；权重函数；属性权重；决策表

中图分类号:C931　　　文献标识码:A

1　引言

1965 年，Zadeh 提出了模糊集 Fuzzy sets[1] 的概念，标志着模糊数学的诞生。模糊数学以模糊集为基础，在许多领域都得到了稳定的发展，在当今数学领域中起着重要作用。模糊集合可以描述和反映外延不分明的模糊概念，克服了经典集合的不足。模糊数学弥补了传统数学的不足，对于处理随机性和模糊性方面的问题起着至关重要的作用。

在 1982 年，由波兰科学院院士、华沙理工大学教授 Pawlak 提出的粗糙集理论[2-3]在模糊性和不确定性方面，提供了一种新的思路。知识约简[4-8]也称特征选择[9]，是粗糙集理论中的核心，在数据挖掘中也引起了广泛的关注，他的目的是为了减少数据的冗余，并且保持约简前后决策表分类能力不变。在实际的知识库中，通常会存在一些不相关的知识，这些多余的知识必然产生更多的计算量，这就可以采取属性约简的方法减少数据的冗余，既不会影响分类能力，也会降低计算量。目前，有很多关于属性约简的研究。比如:桑在 2021 年提出的基于模糊优势邻域的条件熵的增量特征选择[10]；王在 2019 年提出的基于邻域自信息的特征选择[11]等。

在现实生活中有很多信息系统是基于优势关系的，同时它的属性值也是模糊数，并且对不同的属性的重视程度也是不一样的。一些学者研究了粗糙集中属性权重的分配问题，例如:胡在 2021 年提出的在加权邻域粗糙集的属性约简[12]；郭等利用决策树学习，提出了一种多粒度区间值决策的粒度加权模型[13]。而本文根据不同属性的重视程度，对每个属性赋予各自的权值，由此定义一种新的权重函数，并给模糊关系赋予了新定义，并在决策表的基础上，得出带属性权重的模糊序决策表。在此基础上，引入

* 收稿日期:2021-06-16；修订日期:2021-10-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61976245；61772002)

作者简介:冉钦文(2001-)，西南大学人工智能学院学生，研究方向:粒计算，人工智能；徐伟华(通信作者)(1979-)，西南大学人工智能学院教授，博士生导师，研究方向:粒计算，认知计算，信息融合，人工智能。

部分一致函数、部分一致可辨识属性集和部分一致可辨识矩阵，得到求解部分一致约简的方法，并通过实例分析该方法的有效性。

2　优势关系下带属性权重的模糊决策表

决策表主要包含两个方面，条件属性和决策属性，主要探索条件属性和决策属性之间的关系。为了使读者便于理解，首先介绍相关概念，相关定义性质可查阅文献[14]。

定义 2.1　决策表 $I=(U,AT\cup DT,F,G)$ 为一个五元组，表 $I=(U,AT,F)$ 是一个三元组，AT 表示条件属性集，DT 表示决策属性集。即：

U 是非空有限对象集，$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$；

AT 是有限条件属性集，$AT=\{a_1,A_2,\cdots,A_p\}$；

DT 是有限决策属性集，$DT=\{d_1,d_2,\cdots,d_q\}$；

F 是 U 与 AT 的关系集，$F=\{f:U\to V_A,a\in A\}$，V_A 是条件属性 a 的有限值域；

G 是 U 与 DT 的关系集，$G=\{g:U\to V_d,d\in D\}$，V_d 是条件属性 d 的有限值域；

定义 2.2　设 $I=(U,AT\cup DT,F,G)$ 为一个决策表，对任意的 $f\in F$，$g\in G$，$a\in AT$ 和 $x\in U$ 都有

$$f(x,a)=\mu_a(x),\quad g(x,d)\in R(R\text{ 为实数集})$$

其中，函数 $\mu_a:U\to[0,1]$ 表示 U 中元素 x 在条件属性 a 下的隶属度，称 $f(x,a)$ 为模糊数。记 $f(a)=\{f(x,a)\mid a\in AT\}$，则称 $f(a)$ 为 U 上的模糊集。称 $I=(U,AT,F)$ 是模糊表，$I=(U,AT\cup DT,F,G)$ 为模糊决策表。

定义 2.3　设 $I=(U,AT\cup DT,F,G)$ 为一个模糊决策表，$\forall x\in U$，$\forall A\subseteq AT$，$\forall A_i\in A$，定义对象 x 的权重函数为：

$$S_A(x)=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\mu_{a_i}(x) \tag{1}$$

其中，m 表示 A 中属性的个数，$\mu_A(x)$ 表示对象 x 在条件属性 a 下的隶属度，ω_i 表示属性 A_i 的权重，对于所有属性的权重满足 $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_p=1(0\le\omega_i\le1,i=1,2,\cdots,p)$。

注意：ω_i 为属性 A_i 的权重，某个属性权重越大表示得分评价越看重该属性。因此，在进行得分评价时，需要根据实际情况给出各个属性的权重。

下面根据以上知识，给出带属性权重的模糊决策表中条件属性值的序关系和决策属性值的序关系的定义。

定义 2.4　设 $I=(U,AT\cup DT,F,G)$ 为模糊决策表，$\forall f\in F$，$\forall g\in G$，$\forall A\subseteq AT$，$\forall a\in A$，$\forall x_i$，$x_j\in U$，都有：

$$\begin{gathered}f(x_i,A)\ge f(x_j,A)\Leftrightarrow S_A(x_i)\ge S_A(x_j)\\ g(x_i,d)\ge g(x_j,d)\end{gathered} \tag{2}$$

其中 $f(x_i,A)$ 表示对于 x_i 考虑的属性是 A，A 表示准则集，$\forall a_i\in A$，a_i 称为模糊决策表的一个准则。此时，$I=(U,AT\cup DT,F,G)$ 表示模糊序决策表。对于 U 中的任意两个对象，都存在着两种偏序关系：递增偏序关系“$\ge$”和递减偏序关系“$\le$”。

为了简单而不失一般性，本文只给出由递增偏序关系诱导的优势关系，同样的，可以得出由递减关系得到诱导的优势关系。

定义 2.5　设 $I=(U,AT\cup DT,F,G)$ 为模糊决策表，若 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_p)$ 为权重向量，则称 $I^{\ge}=(U,AT\cup DT,F,G,\omega)$ 为带属性权重的模糊决策表，其中 $\omega_i(i=1,2,\cdots,p)$ 为属性 A_i 的权重。

在带属性权重的模糊决策表中，对于 $\forall x,y\in U$，存在着一个优势关系“$\ge$”使得“$x\ge y$”，表示 x 优于 y.

在带属性权重的模糊决策表中，设非空集合 A 满足 $A\subseteq AT$，则根据权重函数建立的优势关系：

$$R_{\tilde{A}}^{\geqslant}=\{(x,y)\in U\times U \mid x\geq y\}=\{(x,y)\in U\times U \mid S_A(x)\geq S_A(y)\}$$
$$R_{\tilde{d}}^{\geqslant}=\{(x,y)\in U\times U \mid g(x,d)\geq g(y,d),g\in G\} \tag{3}$$

称为带属性权重的模糊优势关系，此时该表称为基于优势关系下的带属性权重模糊决策表。

在模糊优势关系 $R_{\tilde{A}}^{\geqslant}$ 的基础上就可以诱导得出：

$$[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}=\{y\in U \mid (y,x)\in R_{\tilde{A}}^{\geqslant}\}=\{y\in U \mid S_A(y)\geq S_A(x)\}$$
$$[x]_{\tilde{d}}^{\geqslant}=\{y\in U \mid g(x,d)\geq g(y,d),g\in G\} \tag{4}$$

在基于优势关系下的模糊决策表中，$[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}$，$[x]_{\tilde{d}}^{\geqslant}$ 分别是条件属性集下的优势类和决策属性集下的优势类。

用 $U/R_{\tilde{A}}^{\geqslant}=\{[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\mid x\in U\}$表示在论域 U 上由$R_{\tilde{A}}^{\geqslant}$ 诱导的带属性权重的模糊优势类的全体。一般情况下，$U/R_{\tilde{A}}^{\geqslant}$ 中的所有优势类不一定会构成 U 上的一个划分，而仅仅只是 U 上的一个覆盖。

定义 2.6 设$I^{\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为模糊决策表，若$R_{\widetilde{AT}}^{\geqslant}\subseteq R_{\tilde{d}}^{\geqslant}$，则该模糊决策表是协调的；否则若 $R_{\widetilde{AT}}^{\geqslant}\not\subset R_{\tilde{d}}^{\geqslant}$，则称该决策表是不协调的。

关于模糊决策表的性质这里不再赘述，读者可详见文献[13]。

3 优势关系下带属性权重模糊决策表的部分一致约简

本文只给出在不协调带属性权重的模糊决策表下的部分一致函数以及如何求得部分一致约简。

定义 3.1 带属性权重的模糊决策表$I^{\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$，$AT$ 和 d 在 U 上生成的优势关系分别为$R_{\tilde{A}}^{\geqslant}$，$R_{\tilde{d}}^{\geqslant}$，$\forall A\subseteq AT$，$\forall x\in U$，记

$$U/R_{\tilde{A}}^{\geqslant}=\{[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant} \mid x\in U\}$$
$$U/R_{\tilde{d}}^{\geqslant}=\{D_1,D_2,\cdots,D_k\}$$
$$\sigma_A(x)=\{D_s \mid [x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\subseteq D_s,x\in U,s=1,2,\cdots,k\} \tag{5}$$

其中，$[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}=\{y\in U|(x,y)\in R_{\tilde{A}}^{\geqslant}\}$。$\sigma_A(x)$称为属性子集 A 在 U 上的部分一致函数。

由部分一致函数的定义可得到如下定理：

定理 3.1 设 $I^{\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$为带属性权重的模糊决策表。$\forall A\subseteq AT$，有：

(1) $\forall x\in U$，如果 $B\subseteq A$，则有$\sigma_B(x)\subseteq\sigma_A(x)$；

(2) $\forall x,y\in U$，如果$[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\subseteq[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}$，那么有 $\sigma_A(x)\subseteq\sigma_A(y)$。

证明 已知$U/R_{\tilde{d}}^{\geqslant}=\{D_1,D_2,\cdots,D_k\}$。

(1)设$\forall y\in\sigma_B(x)$，由部分一致函数定义得$[y]_{\tilde{B}}^{\geqslant}\subseteq D_s$。又因为对于$\forall x\in U$，有 $B\subseteq A$，所以$[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\subseteq[y]_{\tilde{B}}^{\geqslant}$，从而$[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\subseteq D_s$，$y\in\sigma_A(x)$，故$\sigma_B(x)\subseteq\sigma_A(x)$。

(2)设$\forall D_s\in\sigma_A(x)$，由部分一致函数的定义得$[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\subseteq D_s$。又因为$\forall x,y\in U$，有$[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\subseteq[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}$，所以$[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\subseteq D_s$，$\forall D_s\in\sigma_A(y)$，故 $\sigma_A(x)\subseteq\sigma_A(y)$。

定义 3.2 带属性权重的模糊决策表$I^{\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$。若$\forall x\in U$，$A\subseteq AT$，有$\sigma_A(x)=\sigma_{AT}(x)$，则称 A 是$I^{\geqslant}$中关于带属性权重的模糊优势关系$R_{\widetilde{AT}}^{\geqslant}$的部分一致协调集。若 A 的任何真子集均不是部分一致协调集，则 A 是$I^{\geqslant}$中关于带属性权重的模糊优势关系$R_{\widetilde{AT}}^{\geqslant}$的部分一致约简。

下面给出优势关系下带属性权重的模糊决策表中的部分一致约简的判定定理。

定理 3.2 带属性权重的模糊决策表$I^{\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$，$A\subseteq AT$，则 A 是部分一致协调集的充要条件是对于$\forall x,y\in U$，若 $\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(x)$，则$[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\neq[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}$.

证明 先证必要性：用反证法的证明思路，假设当$\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(x)$时$[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\neq[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}$不成立，那么$[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}=[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}$，即$[y]_{\tilde{A}}^{\geqslant}\subseteq[x]_{\tilde{A}}^{\geqslant}$.由定理 3.1(2)可知 $\sigma_A(x)\subseteq\sigma_A(y)$。已知 A 是部

分一致协调集，那么有$\sigma_{AT}(x)\subseteq\sigma_{AT}(y)$，因此$\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)=\sigma_{AT}(x)$，与原假设$\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(x)$矛盾，因此原命题成立。

充分性：已知，$A\subseteq AT$，由定理 3.1(1)知，$\sigma_A(x)\subseteq\sigma_{AT}(x)$，要得到 A 是部分一致协调集，只需证明$\sigma_{AT}(x)\subseteq\sigma_A(x)$即可。

由条件可知，$\forall x,y\in U$，若$\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(x)$，则$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\neq[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$. 可得到$\forall x,y\in U$，若$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}=[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$，有$\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)=\sigma_{AT}(x)$，即$[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\subseteq[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$ 成立推出$\sigma_{AT}(x)\subseteq\sigma_{AT}(y)$。

任取$\forall D_k\in\sigma_{AT}(x)$，则需要证明$D_k\in\sigma_A(x)$，即证明$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\subseteq D_k$. 又因为$\sigma_{AT}(x)\subseteq\sigma_{AT}(y)$，所以$D_k\in\sigma_{AT}(y)$，即$[y]_{\widetilde{AT}}^{\gtrsim}\subseteq D_k$，所以 $y\in D_k$. 由 y 的任意性可得$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\subseteq D_k$，所以得到$\sigma_{AT}(x)\subseteq\sigma_A(x)$，得证。

4　优势关系下带属性权重的模糊决策表的部分一致约简方法

在第 3 节，定义了在带属性权重的模糊决策表中的部分一致协调集并给出其相关定理，通过这些，可以判断准则集是否是部分一致约简。下面将介绍求部分一致约简的一种方法。

在这之前，先介绍部分一致可辨识属性集和分一致可辨识矩阵。

定义 4.1　设$I^{\geq}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$为带属性权重的模糊决策表，记：

$$D_{\geq AT}^{\sigma}=\{(x_i,x_j)\mid\sigma_{AT}(x_j)\subset\sigma_{AT}(x_i)\}$$

$$Dis_{\geq AT}^{\sigma}(x_i,x_j)=\begin{cases}\{A\in AT\mid S(x_i)\geq S(x_j)\}, & (x_i,x_j)\in D_{\geq AT}^{\sigma}\\ \varnothing, & (x_i,x_j)\notin D_{\geq AT}^{\sigma}\end{cases}\tag{6}$$

$Dis_{\geq AT}^{\sigma}(x_i,x_j)$表示$I^{\geq}$中带属性权重的模糊优势关系$R_{\widetilde{AT}}^{\gtrsim}$在$x_i,x_j$下的部分一致相对可辨识属性集，简称部分一致可辨识属性集。

记$Dis_{\geq AT}^{\sigma}=(Dis_{\geq AT}^{\sigma}(x_i,x_j))_{|U|\times|U|}$.称$Dis_{\geq AT}^{\sigma}$为$I^{\geq}$中带属性权重的模糊优势关系$R_{\widetilde{AT}}^{\gtrsim}$在$x_i,x_j$下的部分一致相对可辨识矩阵，简称部分一致可辨识矩阵。

特别地，$\forall x_i\in U$ 有：$Dis_{\geq AT}^{\sigma}(x_i,x_i)=\varnothing$.

定理 4.1　设$I^{\geq}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$为带属性权重的模糊决策表，$A\subseteq AT$，若$\forall(x,y)\in D_{\geq AT}^{\sigma}$则$A\cap Dis_{\geq AT}^{\sigma}(x,y)\neq\varnothing$ 是 A 是部分一致协调集的充要条件。

证明　必要性：$\forall(x,y)\in D_{\geq AT}^{\sigma}$，都有$\sigma_{AT}(y)\subset\sigma_{AT}(x)$，所以$\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(x)$。又因为 A 是部分一致协调集，由定理 3.2 可得$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\neq[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$，所以$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$ 与$[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$ 之间的关系有三种情况：

(1)$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\subset[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$；

(2)$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}=\varnothing$；

(3)$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\subset[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$ 且$[x)]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\subset[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$；

下面证明 3 种情况下都有 $A\cap Dis_{\geq AT}^{\sigma}(x,y)\neq\varnothing$ 成立。

(1)当$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\subset[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$ 时，$\sigma_A(y)\subset\sigma_A(x)$，至少存在一个 $z\in[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$ 并且 $z\notin[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$。由 $z\in[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$ 可得，至少存在 $a\in A$，使得 $f(z,a)\geq f(y,a)$，又因为 $z\notin[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$，可得 $f(x,a)\geq f(z,a)$。可得 $f(x,a)\geq f(y,a)$，即可得 $a\in Dis_{\geq AT}^{\sigma}(x_i,x_j)$，故 $A\cap Dis_{\geq AT}^{\sigma}(x,y)\neq\varnothing$.

(2)如果$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}=\varnothing$，必然存在一个 $a\in A$ 使得 $f(x,a)\geq f(y,a)$，即可得 $a\in Dis_{\geq AT}^{\sigma}(x,y)$，即 $A\cap Dis_{\geq AT}^{\sigma}(x,y)\neq\varnothing$. 否则若对于所有 $a\in A$ 都有 $f(x,a)\leq f(y,a)$，则 $y\in[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$，这与原假设矛盾。

(3)当$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\subset[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$ 且$[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\cap[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}\subset[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$ 时，证明过程与(1)相同。因为也至少存在一个 $z\in[y]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$，但是 $z\notin[x]_{\tilde{A}}^{\gtrsim}$.

综上，必要性得证。

下面证明充分性成立：如果 $\forall (x,y)\in D^{\sigma}_{\geq AT}$ 都有 $A\cap Dis^{\sigma}_{\geq AT}(x,y)\neq\emptyset$ 成立，那么必定存在 $a\in A$ 且 $a\in Dis^{\sigma}_{\geq AT}(x,y)$，故有 $f(x,a)>f(y,a)$，因此 $y\notin[x]^{\geqslant}_{A}$. 又因为 $y\in[y]^{\geqslant}_{A}$，所以 $[x]^{\geqslant}_{A}\cap[y]^{\geqslant}_{A}\neq[y]^{\geqslant}_{A}$. 此外，$(x,y)\in D^{\sigma}_{\geq AT}$，$\sigma_{AT}(y)\subset\sigma_{AT}(x)$，可得到 $\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(x)$。所以当 $\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(x)$ 时，有 $[x]^{\geqslant}_{A}\cap[y]^{\geqslant}_{A}\neq[y]^{\geqslant}_{A}$，根据定理 3.2 可以得到 A 是部分一致协调集。

定义 4.2　带属性权重的模糊决策表 $I^{\geq}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$，$Dis^{\sigma}_{\geq AT}$ 是带属性权重的模糊优势关系 $R^{\geqslant}_{AT}$ 的部分一致可辨识矩阵。记：

$$M^{\sigma}_{\geq AT}=\wedge\ \{\vee\ \{a\mid a\in Dis^{\sigma}_{\geq AT}(x_i,x_j)\}\mid\forall x_i,x_j\in U \tag{7}$$

称 $M^{\sigma}_{\geq AT}$ 为在带属性权重的模糊决策表中的部分一致可辨识公式。

定理 4.2　带属性权重的模糊决策表 $I^{\geq}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$，$M^{\sigma}_{\geq AT}$ 是部分一致可辨识公式，其极小析取范式为 $M^{\sigma}_{\geq min}=\bigvee\limits_{k=1}^{m}(\bigwedge\limits_{s=1}^{q_k}A_s)$。若 $B^k_{\sigma}=\{A_s,s=1,2,\cdots,q_k\}$，则所有部分一致约简构成的集合为 $\{B^k_{\sigma},k=1,2,\cdots,m\}$。

5　案例分析

假设在某次演讲比赛中，共有 8 名参赛选手 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)$，其中有十位评委对选手的三种演讲表现 (a_1,a_2,a_3) 进行投票，得到各个表现的得分情况，再综合三种演讲表现进行最终的等级评选，共有 1，2，3 三种不同的等级。

表 1 给出了十位评委对十名选手的评选情况，对选手 x_5 在表现 a_1 下的得分情况解释如下：有十位评委，其中有四位评委表示认可，则得分为 0.4，这时可记作 $f(x_5,a_1)=0.4$。此外，对于 a_1,a_2,a_3 三种不同的演讲表现，有不同的重视程度，表示属性权重，分别为 0.5，0.3，0.2。

表 1　带属性权重的模糊序决策信息系统

U	a_1	a_2	a_3	d
x_1	0.1	0.2	0.2	3
x_2	0.3	0.4	0.6	2
x_3	0.2	0.2	0.1	1
x_4	0.3	0.4	0.4	2
x_5	0.4	0.4	0.7	3
x_6	0.3	0.5	0.4	1
x_7	0.4	0.3	0.3	3
x_8	0.5	0.6	0.8	2

根据带属性权重的模糊优势类的定义，可得到：

$[x_1]^{\geqslant}_{AT}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$；

$[x_2]^{\geqslant}_{AT}=\{x_2,x_5,x_8\}$；

$[x_3]^{\geqslant}_{AT}=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$；

$[x_4]^{\geqslant}_{AT}=\{x_2,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$；

$[x_5]^{\geqslant}_{AT}=\{x_5,x_8\}$；

$[x_6]_{AT}^{\geqslant}=\{x_2,x_5,x_6,x_8\}$；

$[x_7]_{AT}^{\geqslant}=\{x_2,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$；

$[x_8]_{AT}^{\geqslant}=\{x_8\}$；

$[x_1]_d^{\geqslant}=[x_5]_d^{\geqslant}=[x_7]_d^{\geqslant}=\{x_1,x_5,x_7\}$；

$[x_2]_d^{\geqslant}=[x_4]_d^{\geqslant}=[x_8]_d^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_7,x_8\}$；

$[x_3]_d^{\geqslant}=[x_6]_d^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$；

显然，$R_{AT}^{\geqslant}\not\subset R_d^{\geqslant}$. 因此，该模糊决策表是不协调的。

下面计算表 1 的部分一致约简：

方法 1：根据定义 4.1 求解

根据关于决策属性的优势类可以得到：

$U/R_d^{\geqslant}=\{D_1,D_2,D_3\}$，其中：

$D_1=\{x_1,x_5,x_7\}$

$D_2=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_7,x_8\}$

$D_3=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$

$\sigma_{AT}(x_1)=\sigma_{AT}(x_3)=\sigma_{AT}(x_4)=\sigma_{AT}(x_6)=\sigma_{AT}(x_7)=\{D_3\}$；

$\sigma_{AT}(x_2)=\sigma_{AT}(x_5)=\sigma_{AT}(x_8)=\{D_2,D_3\}$；

如果取 $A=\{a_2,a_3\}$，可以计算得到 $\forall x\in U$，有 $\sigma_A(x)=\sigma_{AT}(x)$，所以 $A=\{a_2,a_3\}$ 是部分一致协调集。

取 $B=\{a_2\}$，可以得到：

$[x_1]_B^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$；

$[x_2]_B^{\geqslant}=\{x_2,x_4,x_5,x_6,x_8\}$；

$[x_3]_B^{\geqslant}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$；

$[x_4]_B^{\geqslant}=\{x_2,x_4,x_5,x_6,x_8\}$；

$[x_5]_B^{\geqslant}=\{x_2,x_4,x_5,x_6,x_8\}$；

$[x_6]_B^{\geqslant}=\{x_6,x_8\}$；

$[x_7]_B^{\geqslant}=\{x_2,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\}$；

$[x_8]_B^{\geqslant}=\{x_8\}$；

所以有：

$\sigma_B(x_1)=\sigma_B(x_2)=\sigma_B(x_3)=\sigma_B(x_4)=\sigma_B(x_6)=\sigma_B(x_5)=\sigma_B(x_7)=D_3$；

$\sigma_B(x_8)=\{D_2,D_3\}$；

因为 $\sigma_B(x_2)\neq\sigma_{AT}(x_2)$，$\sigma_B(x_5)\neq\sigma_{AT}(x_5)$ 所以 $B=\{a_2\}$ 不是部分一致协调集。

同理，可以得到 $\{a_3\}$ 均是部分一致协调集，因此根据定义 4.1 可以得到该带属性权重的模糊决策表的部分一致约简为 $\{a_3\}$。

方法 2：根据定理 4.2 求解

根据表 1 的带属性权重的模糊决策表，可以计算出该系统的部分一致可辨识矩阵，如表 2 所示。

表 2 部分一致可辨识矩阵

$Dis^{\sigma}_{\geq AT}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_2	AT	$\emptyset$	AT	a_3	$\emptyset$	a_3	a_2,a_3	$\emptyset$
x_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_5	AT	a_1,a_3	AT	a_1,a_3	$\emptyset$	a_1,a_3	a_2,a_3	$\emptyset$
x_6	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_7	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
x_8	AT	AT	AT	AT	AT	AT	AT	$\emptyset$

$$M^{\sigma}_{\geq AT}=AT\wedge a_3\wedge(a_2\vee a_3)\wedge(a_1\vee a_3)=a_3$$

因此，$\{a_3\}$是该带属性权重的模糊决策表的部分一致约简。两种方法得到的部分一致约简相同。

6 结论

本文在模糊决策表下，考虑在不同情况下，每个属性具有不同的重视程度，并对每个属性赋予合适的权值，建立一种新的权重函数形成不协调的带属性权重的模糊决策表。然后，在该表中提出了部分一致约简的概念，并给出其判定定理及部分一致可辨识矩阵的概念，然后给出了部分一致约简的求解方法。最后，通过一个简单的实例分析了该方法的有效性。

参考文献：

[1] Zadhl A. Fuzzy sets[J]. Information and Control，1965，8(3)：338－353.

[2] Pawlak Z. Rough sets：Theoretical aspects of reasoning about data[M]. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，1992.

[3] Ierzy W，et al. Rough sets[J]. Communications of the ACM，1995，38(11)：88－95.

[4] 苟光磊，王国胤. 基于不协调置信优势原理关系的知识约简[J]. 计算机科学，2016，43(6)：204－207.

[5] 刘芳，李天瑞. 基于边界域的不完备信息系统属性约简方法[J]. 计算机科学，2016，43(3)：242－245.

[6] 徐伟华，张先韬，王巧荣. 序信息系统中变精度粗糙集属性约简的 Matlab 实现[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版)，2013，27(1)：107－115.

[7] Jing Y G，Li T R，Huang J F，Zhang Y Y. An incremental attribute reduction approach based on knowledge granularity under the attribute generalization[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2016，76：80－95.

[8] 鞠恒荣等. 量化粗糙集的单调性属性约简方法[J]. 计算机科学，2015，76：80－95.

[9] Ding W P，Lin C T，Witold P. Multiple relevant feature ensemble selection based on multilayer co-evolutionary consensus MapReduce[J]. IEEE Transactions on Cybernetics，2020，50(2)：425－439.

[10] Sang B B，Chen H M，Yang L，Li T R，Xu W H. Feature selection for dynamic interval-valued ordered data based on fuzzy dominance neighborhood rough sets[J]. Knowledge-Based Systems，2021，227.107223.

[11] Wang C Z，Huang Y，Shao M W，Hu Q H，Chen D G. Feature selection based on neighborhood self-information [J]. IEEE Transactions on Cybernetics，2019.2923430.

[12] Hu M，Tsang E C C，Guo T T，Chen D G，Xu W H. A novel approach to attribute reduction based on weighted neighborhood rough sets[J]. Knowledge-Based Systems，2021，220.106908.

[13] Guo Y T，Tsang E C C，Xu W H，Chen D G. Adaptive weighted generalized multi-granulation interval-valued

decision-theoretic rough sets[J]. Knowledge-Based Systems，2020，187.
[14] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京：科学出版社，2013.
[15] 林冰雁，徐伟华，杨倩. 带偏好度量的直觉模糊序决策信息系统的部分一致约简[J]. 计算机科学，2018，45(1)：148－152.

Partially Consistent Reduction in Fuzzy Decision Table with Attribute Weights Based on Dominance Relation

RAN Qin-wen，XU Wei-hua
(College of Artificial Intelligent，Southwest University，Chongqing 400715，China)

Abstract：In real life，there are many information tables based on the dominance relationship，and the attribute value of each sample is fuzzy number，and the importance of different attributes is not the same. That is，different attributes have different weights. In view of this situation，this paper uses the idea of weight function of intuitionistic fuzzy order list for reference，establishes a weight function on conditional attribute set，and gives incongruous fuzzy order decision table with attribute weight. Then，the partially consistent function and partially consistent coordination set are defined in the decision table，and the partially consistent reduction is obtained by using the method of partially consistent identifiable matrix. Finally，a case is given to analyze the effectiveness of the method.

Key words：Partially Consistent Reduction；Weighted Function；Attribute Weight；Decision Table