doi:10.16112/j.cnki.53-1223/n.2022.01.291

度量偏好直觉模糊序决策信息系统的分布约简

徐伟华,蒋宗颖
(西南大学 人工智能学院,重庆 400715)

摘要: 在直觉模糊信息系统中引入了加权得分函数,在此基础上构造了基于度量偏好的直觉模糊序决策信息系统,进一步通过考虑度量偏好直觉模糊序决策信息系统下的优势关系,给出了一种条件准则集是分布约简或者最大分布约简的判断定理. 然后,通过讨论分布和最大分布协调集的性质,在辨识矩阵的辅助下研究了具体度量偏好直觉模糊序决策信息系统下的分布约简方法. 最后,通过分析了具体的实例,验证了辨识矩阵获得分布约简的方法,并给出分布约简的实际意义.

关键词: 偏序关系;分布约简;加权得分函数;直觉模糊集;粗糙集

中图分类号: TP18 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-855X(2022)01-0000-00

Distribution Reduction in Intuitionistic Fuzzy Ordered Decision Information System with Preference Measure

XU Weihua, JIANG Zongying
(College of Artificial Intelligent, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: In this paper, a weighted score function was introduced into the data set with intuitionistic fuzzy numbers, and an intuitionistic fuzzy ordered decision information system with preference measure was constructed on the base of the partial order relation by the weighted score function. And the dominance relation was defined in this decision information system. Moreover, the judgment theorem was proposed in the system, by used of which the conditional criterion set can be considered a distribution reduction or a maximum distribution reduction. In order to obtain all distribution reductions, a method was put forward by the identification matrix by the properties of distribution and maximum distribution coordination set in the new decision information system. Finally, a specific case was analyzed to verify the method of the distribution reduction by the identification matrix, and the practical meaning of distribution reduction was given in real life.

Key words: partial order relation; distribution reduction; weighted score function; intuitionistic fuzzy set; rough set

0 引 言

直觉模糊集[1]是保加利亚学者 Atanassov 在 1986 年提出的一种基于模糊集理论[2]的推广. 其核心思想是在模糊集隶属度的基础上,增加了非隶属度以及犹豫度的概念,以期能够更加全面、清晰地描述和理解模糊概念. 直觉模糊集理论提出以来,受到了国内外学者的广泛关注,也成功应用到物流服务、图像融合、决策判断、机器学习、医疗诊断等领域[3-7]. 当前已经成为处理模糊性和不确定性问题的有效工具.

粗糙集[8]是 1982 年波兰学者 Pawlak 提出的另一种处理不确定性问题的工具. 该理论强调从数据本身出发,不需要任何所研究问题的先验知识便可以从数据中发现知识. 属性约简[9-10]是粗糙集理论研究

收稿日期: 2021-08-27. **基金项目:** 国家自然科学基金项目(61976245).

作者简介: 徐伟华(1979-),男,博士,教授,博士生导师. 主要研究方向:粒计算、认知计算、信息融合、不确定性人工智能等. **E-mail:** chxuwh@swu.edu.cn

中最为重要的内容之一,其基本内容是指在保持决策能力不变的前提下尽可能去除冗余元素,降低知识库的内存存储空间,有助于在知识获取过程中降低时间复杂度. 此外,众多学者从不同的角度对属性约简进行了研究,并取得了很多重要成果[11-14].

现实生活中,决策信息系统一般不是基于等价关系,而是基于条件属性取值为直觉模糊数的优势关系,这更符合实际需求. 本文通过对隶属度、非隶属度和犹豫度加权定义了一个加权得分函数,从而定义了一种直觉模糊偏序关系,并在此基础上构造度量偏好直觉模糊序决策信息系统. 进一步在度量偏好直觉模糊序决策信息系统中引入了分布(最大分布)函数和分布(最大分布)辨识矩阵,给出获取决策信息系统全部分布(最大分布)约简的方法,并通过一个具体实例分析比较了两种约简方法的优劣性.

1 度量偏好直觉模糊序决策信息系统

信息系统通常由论域和条件属性构成,特别地,当信息系统中具有决策属性的时候,称该信息系统为决策信息系统. 为了更好地理解决策信息系统,在此给出相关的基本概念[15-16].

定义 1　三元组 $IS=(U,AT,F)$ 称为一个信息系统,五元组 $DI=(U,AT\cup DT,F,G)$ 称为一个决策信息系统,其中,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为一个非空有限的论域,$AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是一个有限条件属性集;$DT=\{d_1,d_2,\cdots,d_q\}$ 是一个有限决策属性集;F 表示 U 与 AT 的笛卡尔积到 $\bigcup_{a\in AT}V_a$ 的映射,即 $F=\{f:U\times AT\to\bigcup_{a\in AT}V_a\}$;$V_a$ 是条件属性 a 的有限值域;G 是 U 与 DT 的笛卡尔积到 $\bigcup_{d\in DT}V_d$ 的映射,即 $G=\{g:U\times DT\to\bigcup_{d\in DT}V_d\}$;$V_d$ 是决策属性 d 的值域.

定义 2　给定一个决策信息系统 $DI=(U,AT\cup\{d\},F,G)$,对任意 $f\in F,g\in G,a\in AT$ 和 $x\in U$,有 $f(x,a)=(\theta_a(x),\vartheta_a(x)),g(x,d)\in R$($R$ 为实数集),分别表示对象 x 在条件属性 a 和决策属性 d 下的取值. 其中,函数 $\theta_a:U\times a\to[0,1]$ 和 $\vartheta_a:U\times a\to[0,1]$ 分别表示 U 中对象 x 在条件属性 a 下的隶属度和非隶属度,并且满足 $0\leqslant\theta_a(x)+\vartheta_a(x)\leqslant1$,称 $f(x,a)$ 为直觉模糊数.

进一步,记 $h(a)=\{(\theta_a(x),\vartheta_a(x))\mid a\in AT\}$,称 $h(a)$ 为 U 上的直觉模糊集. 如果满足上述性质,则称 $IS=(U,AT,F)$ 是直觉模糊信息系统,$DI=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 是直觉模糊决策信息系统.

定义 3　已知 $DI=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 是直觉模糊决策信息系统,$\forall x\in U,\forall a\in AT$,定义对象 x 对属性 a 的加权得分函数为:

$$S_a(x)=\omega_1\theta_a(x)-\omega_2\vartheta_a(x)-\omega_3\pi_a(x)$$

其中:$\theta_a(x)$ 和 $\vartheta_a(x)$ 分别表示 U 中对象 x 在条件属性 a 下的隶属度和非隶属度,并且始终满足 $0\leqslant\theta_a(x)+\vartheta_a(x)\leqslant1$,$\pi_a(x)=1-\theta_a(x)-\vartheta_a(x)$ 表示对象 x 在条件属性 a 下的犹豫度,从而加权得分函数可以进一步表示为:

$$S_a(x)=(\omega_1+\omega_3)\theta_a(x)+(\omega_3-\omega_2)\vartheta_a(x)-\omega_3$$

其中,加权系数 $\sum_{i=1}^{3}\omega_i=1(\omega_i\in[0,1])$.

需要注意的是,加权系数的具体取值应该与实际的决策偏好相适应. 例如,当决策者更看重隶属程度时,应适当提高权重 ω_1,其余情况与之类似. 此外,加权得分函数本质上反映了对象对属性的积极决策,而非隶属度和犹豫度是这种决策的反面描述,反映了阻碍积极决策的程度. 因此,这两个隶属度的权重均设置为负数. 特别地,由于 $\sum_{i=1}^{3}\omega_i=1(\omega_i\in[0,1])$,故具体取值只需要给出隶属度和非隶属度的值,并保证 $\omega_1+\omega_2\leqslant1$,犹豫度的值就可以自动获得.

下面将定义直觉模糊决策信息系统中条件属性值和决策属性值的偏序关系.

定义 4　给定 $DI=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 是直觉模糊决策信息系统,对于 $\forall f\in F,\forall g\in G,\forall a\in AT$ 以及 $\forall x,y\in U$,有:

$$h(x,a)\geqslant h(y,a)\Leftrightarrow S_a(x)\geqslant S_a(y)$$
$$g(x,d)\geqslant g(y,d)$$

则称 $DI=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为直觉模糊序决策信息系统,记 $DI^{\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$.

根据直觉模糊序决策信息系统的构造,可以得到基于条件属性和决策属性的递增或递减的偏序关系.若某一条件属性下得到的条件属性值域构成了一个递增或递减的偏序关系,则称该条件属性为该直觉模糊决策信息系统的一个准则,同理可以获取相对应的决策准则. 根据上述讨论,可以获取由条件属性值域和决策属性值域递增或递减偏序关系构成的优势关系. 本文主要讨论由递增的偏序关系获得的优势关系,不失一般性,本文方法在递减的偏序情况下同样适用.

定义5 给定直觉模糊序决策信息系统 $DI^{\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$,若该决策信息系统具有偏好向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2)$,则称 $DI^{\geqslant}$ 是一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统,记作 $DI_{\omega}^{s\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$. 其中,$\omega_1$ 称为隶属度权重,ω_2 称为非隶属度权重.

因此,在度量偏好直觉模糊序决策信息系统中,如果 $a\in AT$, $\forall x,y\in U$, x、y 之间存在优势关系"$\geqslant$",则用"$x\geqslant y$"表示 x 在准则 a 下优于 y.

已知 $DI_{\omega}^{s\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$ 是一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统,$A\subseteq AT$ 且 $A\neq\phi$,定义条件属性子集 A 的度量偏好直觉模糊优势关系以及决策属性 d 的度量偏好直觉模糊优势关系:

$$\begin{aligned}R_A^{s\geqslant}&=\{(x,y)\in U\times U\mid x\geqslant y,\ \forall a\in A\}\\&=\{(x,y)\in U\times U\mid S_a(x)\geqslant S_a(y),\ \forall a\in A\}\,R_d^{\geqslant}\\&=\{(x,y)\in U\times U\mid g(x,d)\geqslant g(y,d),\ \forall g\in G\}\end{aligned}$$

在 $DI_{\omega}^{s\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$ 中,当 $R_{AT}^{s\geqslant}\subseteq R_d^{\geqslant}$ 时,称该决策信息系统是协调的,否则是不协调的. 而实际生活中,得到的决策信息系统往往是不协调的.

因此,可以从度量偏好直觉模糊优势关系 $R_A^{s\geqslant}$ 和 $R_d^{\geqslant}$ 中诱导出条件属性子集以及决策属性的度量偏好直觉模糊优势类:

$$\begin{aligned}[x]_A^{s\geqslant}&=\{y\in U\mid (y,x)\in \boldsymbol{R}_A^{s\geqslant}\}\\&=\{y\in U\mid S_a(y)\geqslant S_a(x),\ \forall a\in A\}\,[x]_d^{\geqslant}\\&=\{y\in U\mid g(x,d)\geqslant g(y,d),\ \forall g\in G\}\end{aligned}$$

2 度量偏好直觉模糊序决策信息系统的分布约简

若 $DI_{\omega}^{s\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$ 是一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统,$\forall A\subseteq AT$, $\forall x\in U$,记:

$$\frac{U}{R_A^{s\geqslant}}=\{[x]_A^{s\geqslant}\mid x\in U\}$$

$$\frac{U}{R_d^{\geqslant}}=\{D_1,D_2,\cdots,D_r\}$$

$$\mu_A^{s\geqslant}(x)=\left(\frac{|D_1\cap[x]_A^{s\geqslant}|}{|U|},\frac{|D_2\cap[x]_A^{s\geqslant}|}{|U|},\cdots,\frac{|D_r\cap[x]_A^{s\geqslant}|}{|U|}\right)$$

$$\gamma_A^{s\geqslant}(x)=\max\left\{\frac{|D_1\cap[x]_A^{s\geqslant}|}{|U|},\frac{|D_2\cap[x]_A^{s\geqslant}|}{|U|},\cdots,\frac{|D_r\cap[x]_A^{s\geqslant}|}{|U|}\right\}$$

其中:$\frac{U}{R_A^{s\geqslant}}$表示 $R_A^{s\geqslant}$ 诱导出的优势类全体,其通常不能形成对论域 U 的一个划分,而是构成论域 U 上一个覆盖,$\mu_A^{s\geqslant}(x)$、$\gamma_A^{s\geqslant}(x)$分别称为论域 U 中的对象 x 关于条件属性子集 A 的分布函数和最大分布函数.

引理1 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是两个 n 维向量,如果 $a_i=b_i(i=1,\cdots,n)$,则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 等于向量 $\boldsymbol{\beta}$,记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$;如果 $a_i\leqslant b_i(i=1,\cdots,n)$,则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 小于等于向量 $\boldsymbol{\beta}$,记作 $\boldsymbol{\alpha}\leqslant\boldsymbol{\beta}$;如果出现其余情况,则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 不小于等于向量 $\boldsymbol{\beta}$,记作 $\boldsymbol{\alpha}>\boldsymbol{\beta}$.

由定义6和引理1,可以获得在度量偏好直觉模糊序决策信息系统下的相关性质.

定理2.1 给定 $DI_{\omega}^{s\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$ 是一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统, 对于 $\forall A\subseteq AT$,有:

(1) $\forall x\in U$,若 $B\subseteq A$,则 $\mu_A^{s\geqslant}(x)\leqslant\mu_B^{s\geqslant}(x)$;

(2) $\forall x \in U$,若 $B \subseteq A$,则 $\gamma_A^{s\geqslant}(x) \leqslant \gamma_B^{s\geqslant}(x)$;

(3) $\forall x, y \in U$,若 $[y]_A^{s\geqslant} \subseteq [x]_A^{s\geqslant}$,则 $\mu_A^{s\geqslant}(y) \leqslant \mu_A^{s\geqslant}(x)$;

(4) $\forall x, y \in U$,若 $[y]_A^{s\geqslant} \subseteq [x]_A^{s\geqslant}$,则 $\gamma_A^{s\geqslant}(y) \leqslant \gamma_A^{s\geqslant}(x)$.

证明:(1) $\forall x \in U$, 由 $B \subseteq A$,可知 $[x]_A^{s\geqslant} \subseteq [x]_B^{s\geqslant}$,再根据定义 7 可以得到 $\mu_A^{s\geqslant}(x) \leqslant \mu_B^{s\geqslant}(x)$.

(2) ~ (4) 可以由定理 2.1 和定义 7 可得.

定义 7　给定一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统 $DI_\omega^{s\geqslant} = (U, AT \cup \{d\}, F, G, \omega)$, $A \subseteq AT$,若 $\forall x \in U$,有 $\mu_A^{s\geqslant}(x) = \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$,则称 A 是 $DI_\omega^{s\geqslant}$ 中关于度量偏好直觉模糊优势关系 $R_{AT}^{s\geqslant}$ 的分布协调集,简称为分布协调集. 当 A 的任意真子集都不是分布协调集时,称 A 是 $DI_\omega^{s\geqslant}$ 中关于度量偏好直觉模糊优势关系 $R_{AT}^{s\geqslant}$ 的分布相对约简,简称为分布约简.

定义 8　给定一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统 $DI_\omega^{s\geqslant} = (U, AT \cup \{d\}, F, G, \omega)$, $A \subseteq AT$,若 $\forall x \in U$,有 $\gamma_A^{s\geqslant}(x) = \gamma_{AT}^{s\geqslant}(x)$,则称 A 是 $DI_\omega^{s\geqslant}$ 中关于度量偏好直觉模糊优势关系 $R_{AT}^{s\geqslant}$ 的最大分布协调集,简称为最大分布协调集. 当 A 的任意真子集都不是最大分布协调集时,称 A 是 $DI_\omega^{s\geqslant}$ 中关于度量偏好直觉模糊优势关系 $R_{AT}^{s\geqslant}$ 的最大分布相对约简,简称为最大分布约简.

定理 2.2　对于一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统 $DI_\omega^{s\geqslant} = (U, AT \cup \{d\}, F, G, \omega)$, $A \subseteq AT$,如果 A 是分布协调集,那么 A 一定是最大分布协调集.

证明:如果 A 是分布协调集,那么 $\forall x \in U$,都有 $\mu_A^{s\geqslant}(x) = \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$,于是, $\forall x \in U$,都有 $[x]_A^{s\geqslant} = [x]_{AT}^{s\geqslant}$. 由最大分布函数的定义以及最大分布约简的定义可知,若 $\forall x \in U$,都有 $[x]_A^{s\geqslant} = [x]_{AT}^{s\geqslant}$,那么 $\forall x \in U$,都有 $\gamma_A^{s\geqslant}(x) = \gamma_{AT}^{s\geqslant}(x)$,因此 A 是一个最大分布协调集.

反过来,已知 A 是一个最大分布协调集不能推导出 A 是一个分布协调集,因为 $\forall x \in U$,都有 $\gamma_A^{s\geqslant}(x) = \gamma_{AT}^{s\geqslant}(x)$ 成立不能保证 $\forall x \in U$,都有 $[x]_A^{s\geqslant} = [x]_{AT}^{s\geqslant}$ 成立.

定理 2.3　已知 $DI_\omega^{s\geqslant} = (U, AT \cup \{d\}, F, G, \omega)$ 是一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统, $A \subseteq AT$, A 是分布协调集当且仅当 $\forall x, y \in U$,当 $\mu_{AT}^{s\geqslant}(y) > \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$,有 $[y]_A^{s\geqslant} \not\subset [x]_A^{s\geqslant}$.

证明:(1) 必要性　假设 A 是一个分布协调集, $\forall x, y \in U$,根据定理 2.1,如果 $[y]_A^{s\geqslant} \subseteq [x]_A^{s\geqslant}$,显然有 $\mu_A^{s\geqslant}(y) \leqslant \mu_A^{s\geqslant}(x)$. A 是一个分布协调集,故 $\forall x \in U$,有 $\mu_A^{s\geqslant}(x) = \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$,此时 $\mu_{AT}^{s\geqslant}(y) \leqslant \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$. 于是, $\forall x, y \in U$,如果 $[y]_A^{s\geqslant} \subseteq [x]_A^{s\geqslant}$,有 $\mu_{AT}^{s\geqslant}(y) \leqslant \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$. 进一步,可以知道 $\forall x, y \in U$,当 $\mu_{AT}^{s\geqslant}(y) > \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$ 时,有 $[y]_A^{s\geqslant} \not\subset [x]_A^{s\geqslant}$. 必要性得证.

(2) 充分性　由于 $\forall x, y \in U$,当 $\mu_{AT}^{s\geqslant}(y) > \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$ 时,有 $[y]_A^{s\geqslant} \not\subset [x]_A^{s\geqslant}$. 于是,可知 $\forall x, y \in U$,如果 $[y]_A^{s\geqslant} \subseteq [x]_A^{s\geqslant}$,有 $\mu_{AT}^{s\geqslant}(y) \leqslant \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$. 根据定理 2.1 可知,对 $A \subseteq AT$, $\forall x, y \in U$,有 $\mu_A^{s\geqslant}(x) \geqslant \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$. 若要证明 A 是一个分布协调集,只需要证明对 $A \subseteq AT$, $\forall x, y \in U$,有 $\mu_A^{s\geqslant}(x) \leqslant \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$.

当 $\mu_A^{s\geqslant}(x) = (0, 0, \cdots, 0)$ 时, $\mu_A^{s\geqslant}(x) \leqslant \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$ 成立. 考虑 $\mu_A^{s\geqslant}(x) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ 的情形. 若 $\mu_A^{s\geqslant}(x) \neq (0, 0, \cdots, 0)$,有 $\dfrac{|D_i \cap [x]_A^{s\geqslant}|}{|U|} \neq 0$ 成立,即有 $|D_i \cap [x]_A^{s\geqslant}| \neq 0$ 成立. 假设 $y \in D_i \cap [x]_A^{s\geqslant}$,则 $y \in D_i$ 并且 $y \in [x]_A^{s\geqslant}$,因为 $y \in [x]_A^{s\geqslant}$,可以得到 $[y]_A^{s\geqslant} \subseteq [x]_A^{s\geqslant}$,根据其逆否命题可以得到 $\mu_{AT}^{s\geqslant}(y) \leqslant \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$,进一步可得 $[y]_{AT}^{s\geqslant} \subseteq [x]_{AT}^{s\geqslant}$. 又根据定理 2.1 可知 $y \in [y]_{AT}^{s\geqslant}$,结合 $[y]_{AT}^{s\geqslant} \subseteq [x]_{AT}^{s\geqslant}$,则必然有 $y \in [x]_{AT}^{s\geqslant}$. 也就是说,当 $y \in D_i \cap [x]_A^{s\geqslant}$ 时,必然有 $y \in D_i \cap [x]_{AT}^{s\geqslant}$,等价于 $[x]_A^{s\geqslant} \subseteq [x]_{AT}^{s\geqslant}$,即 $\mu_A^{s\geqslant}(x) \leqslant \mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$. 充分性得证.

因此,原定理成立.

定理 2.4　已知 $DI_\omega^{s\geqslant} = (U, AT \cup \{d\}, F, G, \omega)$ 是一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统, $A \subseteq AT$, A 是最大分布协调集当且仅当 $\forall x, y \in U$,当 $\gamma_{AT}^{s\geqslant}(y) > \gamma_{AT}^{s\geqslant}(x)$ 时,有 $[y]_A^{s\geqslant} \not\subset [x]_A^{s\geqslant}$.

证明:与定理 2.3 类似.

3　度量偏好直觉模糊序决策信息系统的分布约简方法

在第 2 节给出了在度量偏好不协调直觉模糊序决策信息系统下分布(最大分布)函数的定义以及判

定定理,这是在准则集下判断分布约简的基础. 在本节中,将通过定义分布辨识矩阵的方式给出具体计算分布约简的方法.

定义 9 给定一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统 $DI_{\omega}^{s\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$,若记:

$$Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)=\{a\in AT\mid(x_i,x_j)\notin R_a^{s\geqslant}\}$$

称 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)$ 是 $DI_{\omega}^{s\geqslant}$ 中 x_i、x_j 关于度量偏好直觉模糊优势关系 $R_{AT}^{s\geqslant}$ 的分布可辨识属性集. 记 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}=(Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j))_{|U|\times|U|}$ 是 $DI_{\omega}^{s\geqslant}$ 中 x_i、x_j 关于带偏好度量的直觉模糊优势关系 $R_{AT}^{s\geqslant}$ 的分布可辨识矩阵.

特别地,$\forall x_i,x_j\in U$,有 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_i)=\phi$,$Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\cap Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_j,x_i)=\phi$.

定理 3.1 对于一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统 $DI_{\omega}^{s\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$,$A\subseteq AT$,$R_A^{s\geqslant}=R_{AT}^{s\geqslant}$ 当且仅当 $\forall x_i,x_j\in U$,当 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$ 时,有 $A\cap Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$.

证明:(1)必要性 $\forall x_i,x_j\in U$,当 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$ 时,根据辨识属性集的定义,存在 $a\in AT$,使得 $(x_i,x_j)\notin R_a^{s\geqslant}$. 因为 $R_A^{s\geqslant}=\cap_{a\in AT}R_a^{s\geqslant}(A\subseteq AT)$,可以知道如果 $(x_i,x_j)\notin R_a^{s\geqslant}$,那么 $(x_i,x_j)\notin R_{AT}^{s\geqslant}$,又因为 $R_A^{s\geqslant}=R_{AT}^{s\geqslant}$,那么 $(x_i,x_j)\notin R_A^{s\geqslant}$. 同样,根据辨识属性集的定义,我们可以知道必然存在 $b\in A$,使 $(x_i,x_j)\notin R_A^{s\geqslant}$,即 $b\in Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant A}(x_i,x_j)$. 因为 $A\subseteq AT$,所以有 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant A}(x_i,x_j)\subseteq Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)$,显然,当 $b\in Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant A}(x_i,x_j)$ 时,$b\in Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)$ 同样成立. 因为 $b\in A$ 并且 $b\in Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)$,所以 $A\cap Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$. 必要性得证.

(2)充分性 已知:$\forall x_i,x_j\in U$ 时,如果 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$,有 $A\cap Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$. 因为 $A\subseteq AT$,所以 $R_{AT}^{s\geqslant}\subseteq R_A^{s\geqslant}$,要证 $R_A^{s\geqslant}=R_{AT}^{s\geqslant}$,只要证 $R_A^{s\geqslant}\subseteq R_{AT}^{s\geqslant}$ 即可. 如果 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$,就存在 $a\in AT$,使得 $(x_i,x_j)\notin R_a^{s\geqslant}$,可以进一步知道 $(x_i,x_j)\notin R_{AT}^{s\geqslant}$,又因为 $A\cap Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$,可知 $a\in A\subseteq AT$,同样地,通过分布辨识属性集定义可以推导出 $(x_i,x_j)\notin R_A^{s\geqslant}$. 也就是说可以由 $(x_i,x_j)\notin R_{AT}^{s\geqslant}$ 推导出 $(x_i,x_j)\notin R_A^{s\geqslant}$,其逆否命题同样成立,$(x_i,x_j)\in R_A^{s\geqslant}$ 可以推导出 $(x_i,x_j)\in R_{AT}^{s\geqslant}$,即 $R_A^{s\geqslant}\subseteq R_{AT}^{s\geqslant}$. 充分性得证.

因此,原定理成立.

推论 3.1 给定一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统 $DI_{\omega}^{s\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$,$A\subseteq AT$,$A$ 是一个分布协调集当且仅当 $\forall x_i,x_j\in U$,当 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$ 时,有 $A\cap Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$.

证明:根据定理 3.1,若要证明推论 3.1 成立,只需要证明 A 是一个分布协调集与 $R_A^{s\geqslant}=R_{AT}^{s\geqslant}$ 互为充要条件. 当 A 是一个分布协调集时,$\forall x\in U$,有 $\mu_A^{s\geqslant}(x)=\mu_{AT}^{s\geqslant}(x)$,即 $[x]_A^{s\geqslant}=[x]_{AT}^{s\geqslant}$,显然有 $R_A^{s\geqslant}=R_{AT}^{s\geqslant}$. 反过来,当 $R_A^{s\geqslant}=R_{AT}^{s\geqslant}$ 时,也同样可以得到 A 是一个分布协调集.

定义 10 已知 $DI_{\omega}^{s\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$ 是一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统,$Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}$ 是分布可辨识矩阵,则称:

$$M_{\mu\omega}^{s\geqslant}=\wedge\{\vee\{a\mid a\in Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\}\mid\forall x_i,x_j\in U\}$$

是该度量偏好直觉模糊序决策信息系统的分布辨识公式.

定理 3.2 给定一个度量偏好直觉模糊序决策信息系统 $DI_{\omega}^{s\geqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G,\omega)$,分布辨识公式 $M_{\mu\omega}^{s\geqslant}$ 的极小析取范式为 $M_{\mu\omega}^{s\geqslant\min}=\vee_{k=1}^{m}(\wedge_{s=1}^{q_k}a_s)$. 如果记 $B_{\mu\omega}^{k}=\{a_s,s=1,2,\cdots,q_k\}$,则 $\{B_{\mu\omega}^{k},k=1,2,\cdots,m\}$ 是所有分布约简形式的集合.

证明:$\forall x_i,x_j\in U$,当 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$ 时,根据极小析取范式的定义,有 $B_{\mu\omega}^{k}\cap Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$,由推论 3.1 可知 $B_{\mu\omega}^{k}$ 是一个分布协调集. 在 $B_{\mu\omega}^{k}$ 中删去任意个数(小于 $|B_{\mu\omega}^{k}|$)的元素得到 $B_{\mu\omega}^{k_2}$,存在 $x_i,x_j\in U$,当 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)\neq\phi$ 时,有 $B_{\mu\omega}^{k_2}\cap Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)=\phi$,即 $B_{\mu\omega}^{k_2}$ 可以表示为 $B_{\mu\omega}^{k}$ 的任意真子集,且 $B_{\mu\omega}^{k_2}$ 不是协调集,于是,根据分布约简的定义可知 $B_{\mu\omega}^{k}$ 是一个分布约简. 又因为分布辨识公式 $M_{\mu\omega}^{s\geqslant}$ 包含了在 $\forall x_i,x_j\in U$ 下 $Dis_{\mu\omega}^{s\geqslant AT}(x_i,x_j)$ 的情形,所以在 $M_{\mu\omega}^{s\geqslant}$ 基础上得到的 $\{B_{\mu\omega}^{k},k=1,2,\cdots,m\}$ 是所有分布约简的集合.

4 案例分析

假设某医院的 10 位医生对 7 个病人(x_1,x_2,x_3,x_4, x_5,x_6,x_7)进行联合诊断,他们分别对这些病人的病症(a_1,a_2,a_3,a_4)做出判断,病症通常为心痛等模糊性词语,医生基于病人描述以及从医经验给出这些

病人拥有这些病症的程度，从而判断该病人此刻的病情状况，病情状况分为 A、B、C 三种. 表 1 给出了 10 位医生对 7 个病人的诊断情况，在表 1 中这样解释病人 x_1 在病症 a_1 下的直觉模糊数：一共有 10 位医生，有 4 位医生认为该病人具有病症 a_1，5 位医生认为该病人不具有病症 a_1，还有 1 位医生无法给出准确判断. 这时，认为病人 x_1 对病症 a_1 的隶属度为 0.4，非隶属度为 0.5，犹豫度为 0.1，记作 $f(x_1, a_1) = (0.4, 0.5)$. 可以类似地解释其他直觉模糊数. 此外，在加权得分函数中，人们往往更看重隶属度，所以在此设置偏好权重为 $\omega_1 = 0.6$，$\omega_2 = 0.3$，$\omega_3 = 0.1$.

表 1　度量偏好直觉模糊序决策信息系统

Tab. 1　Intuitionistic fuzzy ordered decision information system with preference measure

U	a_1	a_2	a_3	a_4	d
x_1	(0.4,0.5)	(0.3,0.5)	(0.8,0.2)	(0.4,0.5)	A
x_2	(0.1,0.9)	(0.6,0.2)	(0.7,0.2)	(0.7,0.3)	B
x_3	(0.7,0.3)	(0.4,0.5)	(0.9,0)	(0.1,0.8)	B
x_4	(0.3,0.4)	(0.6,0.3)	(0.4,0.5)	(0.4,0.6)	C
x_5	(0.8,0.2)	(0.4,0.6)	(0.2,0.5)	(0.5,0.5)	A
x_6	(0.2,0.5)	(0.1,0.8)	(0.3,0.7)	(0.4,0.5)	C
x_7	(0.3,0.5)	(0.3,0.4)	(0.6,0.2)	(0.7,0.2)	C

为了便于后续计算在该度量偏好直觉模糊序决策信息系统中的分布约简以及最大分布约简，在表 2 计算了任意对象 $x \in U$ 对任意属性 $a \in AT$ 的加权得分函数.

根据表 2，可以知道：

$$\frac{U}{R_d^{\geqslant}} = \{D_1, D_2, D_3\} = \{\{x_1, x_5\}, \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}\}$$

$$[x_1]_{AT}^{s\geqslant} = \{x_1\}, [x_2]_{AT}^{s\geqslant} = \{x_2\}, [x_3]_{AT}^{s\geqslant} = \{x_3\}, [x_4]_{AT}^{s\geqslant} = \{x_4\},$$

$$[x_5]_{AT}^{s\geqslant} = \{x_5\}, [x_6]_{AT}^{s\geqslant} = \{x_1, x_6, x_7\}, , [x_7]_{AT}^{s\geqslant} = \{x_7\}$$

显然有 $R_{AT}^{s\geqslant} \subseteq R_d^{\geqslant}$，则该度量偏好直觉模糊序决策信息系统是协调的，可计算得到：

$$\mu_{AT}^{s\geqslant}(x_1) = \mu_{AT}^{s\geqslant}(x_5) = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right), \mu_{AT}^{s\geqslant}(x_2) = \mu_{AT}^{s\geqslant}(x_3) = \left(0, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right),$$

$$\mu_{AT}^{s\geqslant}(x_4) = \mu_{AT}^{s\geqslant}(x_7) = \left(0, 0, \frac{1}{7}\right), \mu_{AT}^{s\geqslant}(x_6) = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right),$$

$$\gamma_{AT}^{s\geqslant}(x_1) = \gamma_{AT}^{s\geqslant}(x_2) = \gamma_{AT}^{s\geqslant}(x_3) = \gamma_{AT}^{s\geqslant}(x_4) = \gamma_{AT}^{s\geqslant}(x_5) = \gamma_{AT}^{s\geqslant}(x_7) = \frac{1}{7}, \gamma_{AT}^{s\geqslant}(x_6) = \frac{3}{7}.$$

表 2　上述决策信息系统的加权得分函数

Tab. 2　Weighted score function based on the decision information system

U	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	0.08	0.01	0.42	0.08
x_2	−0.21	0.28	0.35	0.33
x_3	0.33	0.08	0.53	−0.19
x_4	0.03	0.26	0.08	0.06
x_5	0.42	0.06	−0.06	0.15
x_6	−0.06	−0.19	−0.03	0.08
x_7	0.01	0.03	0.28	0.35

方法 1：利用定义 7 求解分布约简与最大分布约简.

经验证，对 AT 的任意真子集 A，不存在 $\forall x \in U$，有 $[x]_{AT}^{s\geqslant} = [x]_A^{s\geqslant}$，根据定义 7 和 8，可以知道 AT 是该度量偏好直觉模糊序决策信息系统的分布约简和最大分布约简.

方法 2:利用定理3.2求解分布约简与最大分布约简.

根据表1的度量偏好直觉模糊序决策信息系统,可得该系统下的分布约简辨识矩阵,如表3所示.

表3 上述决策信息系统下的分布辨识矩阵

Tab.3 Distribution identification matrix based on the decision information system

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	0	24	123	2	124	0	24
x_2	13	0	13	1	1	1	14
x_3	4	24	0	24	14	4	4
x_4	134	234	13	0	14	4	34
x_5	3	234	23	23	0	3	34
x_6	123	234	123	123	124	0	1 234
x_7	13	23	123	12	12	0	0

特别地,便于记录,在表3中,用属性的下标表示属性,用0表示分布可辨识属性集为空集的情况.

由此可得:

$$\begin{aligned} M_{\mu\omega}^{s\geqslant} = &(a_2 \vee a_4) \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_3) \wedge a_2 \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_4) \wedge (a_1 \vee a_3) \wedge a_1 \wedge \\ &(a_1 \vee a_4) \wedge a_4 (a_1 \vee a_3 \vee a_4) \wedge (a_2 \vee a_3 \vee a_4) \wedge (a_3 \vee a_4) \wedge a_3 (a_2 \vee a_3) \wedge \\ &(a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4) \wedge (a_1 \vee a_2) = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \end{aligned}$$

因此,$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$是该度量偏好直觉模糊序决策信息系统的分布约简,由定理2.2可以知道$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$也是该决策信息系统的最大分布约简.

根据计算出的分布约简以及最大分布约简,可以知道,条件属性集AT是使每个病人在病情决策类中隶属度保持不变的属性集,同时它也是每个病人在最大分布病情决策类中保持不变的属性集.

比较方法1和方法2,发现二者的计算结果都相同,但是它们所需要的时间未必相同,为了更加客观地比较不同方法在计算时间上的优劣,分析了这两种方法在最坏情况下的时间复杂度.为了计算时间复杂杂度,把任意两个对象在任一属性下关于加权得分函数的一次比较作为一次基本运算,那么在最坏的情况下,可算得方法1的时间复杂度为$O(|U|^2 \times |AT| \times 2^{|AT|})$,方法2的时间复杂度为$O(|U|^2 \times |AT|)$.比较最坏情况下不同方法的时间复杂度,认为在保持结果一致的前提下应该采用方法2,即分布辨识矩阵的方法来求解分布约简,因为这能大量减少时间成本.

5 结论

本文在直觉模糊序决策信息系统中,借助偏好权重定义了加权得分函数,从而构造了度量偏好直觉模糊序决策信息系统.通过研究分布约简的性质得到了相应的判定定理,给出了两种获取分布约简的方法,并通过一个具体的实例证明了两种方法的可行性与有效性.

参考文献:

[1] ATANASSOV K T. Two theorems for intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2000,110(2):267-269.

[2] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control,1965,8(3):338-353.

[3] 戴文战,王琪. 基于PCNN与IFS的可见光与红外图像融合方法[J]. 光电子·激光,2020,31(7):738-744.
DAI W Z, WANG Q. Research on fusion method of visible and infrared image based on PCNN and IFS[J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2020, 31(7): 738-744.

[4] 汪恒,兰培真. 基于区间直觉模糊集的物流服务商评价与选择[J]. 集美大学学报(自然科学版),2020,25(5):349-355.
WANG H, LAN P Z. Evaluation and selection of logistics service providers based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Jimei University: Natural Science, 2020, 25(5): 349-355.

[5] 薛天宇. 基于直觉模糊集的GSVM模型研究[D]. 新乡:河南师范大学,2015.

XUE T Y. Research on the granulation SVM model based on intuitionistic fuzzy sets[D]. Henan: Henan Normal University, 2015.

[6] 闫林林. 直觉模糊集推理及其在辅助疾病诊断领域的应用[D]. 廊坊:北华航天工业学院,2018.
YAN L L. Intuitionistic fuzzy set reasoning and its application in the field of auxiliary disease diagnosis[D]. Langfang: North China Institute of Aerospace Engineering, 2018.

[7] 陈玉金,徐吉辉,史佳辉,等. 基于直觉犹豫模糊集的三支决策模型及其应用[J]. 计算机科学,2020,47(8):144 – 150.
CHEN Y J, XU J H, SHI J H, et al. Three – way decision models based on intuitionistic hesitant fuzzy sets and its applications[J]. Computer Science, 2020, 47(8): 144 – 150.

[8] ZALEWSKI J. Rough sets: theoretical aspects of reasoning about data[J]. Control Engineering Practice, 1996, 4(5): 741 – 742.

[9] 张文修,米据生,吴伟志. 不协调目标信息系统的知识约简[J]. 计算机学报,2003,26(1):12 – 18.
ZHANG W X, MI J S, WU W Z. Knowledge reductions in inconsistent information systems[J]. Chinese Journal of Computers, 2003, 26(1): 12 – 18.

[10] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京:科学出版社,2013.
XU W H. Ordered information systems and rough set theory[M]. Beijing: Science Press, 2013.

[11] 官礼和,王国胤,于洪. 属性序下的增量式 Pawlak 约简算法[J]. 西南交通大学学报,2011,46(3):461 – 468.
GUAN L H, WANG G Y, YU H. Incremental algorithm of Pawlak reduction based on attribute order[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2011, 46(3): 461 – 468.

[12] 常犁云, 王国胤, 吴渝. 一种基于 Rough Set 理论的属性约简及规则提取方法[J]. 软件学报, 1999,10(11):1206 – 1211.
CHANG L Y, WANG G Y, WU Y. An approach for attribute reduction and rule generation based on rough set theory[J]. Journal of Software, 1999, 10(11): 1206 – 1211.

[13] 张文修,魏玲,祁建军. 概念格的属性约简理论与方法[J]. 中国科学(E 辑),2005(6):628 – 639.
ZHANG W X, WEI L, QI J J. Attribute reduction theory and approach to concept lattice[J]. Science in China Series F – Information Science, 2005, 35(6): 628 – 639.

[14] 龙柄翰,徐伟华,张晓燕. 不协调目标信息系统中基于改进差别信息树的分布属性约简[J]. 计算机科学,2019,46(S1):115 – 119.
LONG B H, XU W H, ZHANG X Y. Distribution attribute reduction based on improved discernibility information tree in inconsistent system[J]. Computer Science, 2019, 46(S1), 115 – 119.

[15] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京:科学出版社,2008.
XU Z S. Intuitionistic fuzzy information aggregation: Theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[16] 陈德刚. 粒计算基础教程[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
CHEN D G. Basic tutorial of granular computing[M]. Beijing: Science Press, 2019.