第 44 卷第 9 期 西南大学学报(自然科学版) 2022 年 9 月
Vol. 44 No. 9 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Sep. 2022

DOI: 10.13718/j.cnki.xdzk.2022.09.017

直觉模糊偏好度量序决策表的近似约简

张晓燕， 刘峥， 侯江龙

西南大学 人工智能学院，重庆 400715

摘要：本文在直觉模糊信息系统的基础上引入了决策序关系，并且对隶属度、非隶属度和犹豫度进行加权，根据其权重建立了带偏好度量的直觉模糊序决策信息系统．在此基础之上，研究了该信息系统上、下近似协调集的重要性质，讨论了该信息系统近似约简的判别方法．最后设计了近似约简的具体算法，并通过实例进行实验对比分析，验证了该约简方法的有效性和可行性．

关 键 词：粗糙集；加权得分函数；近似约简；序决策表；直觉模糊集

中图分类号：TP18 **文献标志码**：A 开放科学(资源服务)标识码(OSID)：

文 章 编 号：1673－9868(2022)09－0168－10

Approximation Reduction in Intuitionistic Fuzzy Ordered Decision Information System with Preference Measure

ZHANG Xiaoyan， LIU Zheng， HOU Jianglong

College of Artificial Intelligence，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，the decision order relation is introduced into the intuitionistic fuzzy information system. The membership degree，non-membership degree and hesitation degree were weighted，and weight score function was proposed in the system. An intuitionistic fuzzy order decision information system was established with preference measurement according to weight scores function. On this basis，the important properties of the upper and lower approximation consistent sets were studied in the information system. Furthermore，the judgement method of approximate reductions was carefully discussed. Finally，the specific algorithm of approximate reduction was designed，and the experimental analysis was carried out to verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Key words：approximation reduction；intuitionistic fuzzy set；rough set；ordered decision table；weighted score function

---

收稿日期：2021－07－06

基金项目：国家自然科学基金项目(61976245)；重庆市研究生科研创新项目(CYS22245)．

作者简介：张晓燕，博士，副教授，硕士生导师，主要从事不确定性推理、人工智能的数学基础、粒计算与知识发现等研究．

粗糙集理论[1-2]最早由波兰科学院院士 Pawlak 于 1982 年提出，该理论是研究不确定性问题的重要工具，且已经被广泛应用于数据挖掘、信息处理、模式识别等领域. 该理论的主要思想是用确定的信息和可能的信息来近似不确定的信息. 在现实生活中，研究人员从样本的二元关系出发结合粗糙集理论，将研究样本区分开，从而完成不同任务的分类问题. 而属性约简是粗糙集理论的重要研究内容，其目的就是在不削弱知识库分类能力的前提下，删减掉冗余的属性. 属性约简正是利用了二元关系下形成的样本类在特定的任务下形成特有的不可区分关系，并建立不可区分矩阵或属性重要度，以对必要和重要属性进行提取. 在当今大数据时代，通过属性约简[3-10]可以精简知识，从而减少运算量，特别是在聚类分析、分类学习，以及不确定性分析等领域展现出了良好的效果. 在属性约简的研究中，选用不同的关系模型会对约简结果产生不同程度的影响，因此模型的优劣也对属性约简的效果具有举足轻重的作用.

另一方面，模糊集理论[11-13]是由美国学者 Zadehl 于 1965 年提出的，该理论将经典集合进行了扩充、推广，引入了元素的隶属度这一概念，从而能够对生活中的不确定性问题进行量化、建模和研究. 模糊集是研究不确定性问题的一个重要工具，该理论的主要思想重点考虑样本并不是非黑即白的情况，生活的很多环境中，元素对于集合的关系并不是单纯的属于或不属于的关系，而是一种模糊概念或状态，如高个子、红苹果、下大雨等. 模糊集理论便可以利用一个介于 0 到 1 之间的隶属度来表示和刻画这些模糊语言或情况. 后来，保加利亚学者 Atanassov 于 1986 年提出了直觉模糊集[14-16]，是对模糊集的进一步延伸，该理论在经典模糊集隶属度的基础上进一步考虑了元素的非隶属度和犹豫度，从而能够更好地贴合实际，模拟现实中更加复杂的问题.

另外，在现实生活中，很多的不确定性问题是基于序关系[17-22]的，即对象之间存在优劣之分，并且其对象的属性值往往是直觉模糊数. 为了更好地研究此类问题，本文引入了直觉模糊偏好度量序决策表，在序决策表的基础上引入了隶属度、非隶属度和犹豫度，并对其加权得到得分函数，进一步根据得分函数研究了在直觉模糊偏好度量序决策表的基础上如何进行近似约简，从而进一步拓展知识约简的应用范围.

1　直觉模糊偏好度量序决策表

决策表作为一种特殊的信息系统，同时具有条件属性和决策属性，下面给出决策表的相关概念.

令 $DT=(U, C\cup D, F, G)$ 为一个五元组，称 I 为决策表. 其中 U 为非空有限对象集，$U=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$；$C$ 为有限条件属性集；D 为有限决策属性集，$D=\{d_1, d_2, \cdots, d_q\}$；$F$ 是 U 与 C 的关系集，$F=\{f_i: U\to V_i, i\leqslant n\}$，$V_i$ 为 a_i 的有限值域；G 是 U 与 D 的关系集，$G=\{g_i: U\to V'_j, j\leqslant q\}$，$V'_j$ 为 d_j 的有限值域.

在决策表的基础上，进一步有直觉模糊决策表.

给定 $I=(U, C\cup\{d\}, F, G)$ 为决策表，对任意 $f\in F$，$g\in G$，$a\in C$ 和 $x\in U$ 有：$f(x, a)=(\mu_a(x), \nu_a(x))$，$g(x, d)\in R$（$R$ 为实数集），其中 $\mu_a(x)$ 和 $\nu_a(x)$ 分别为 $x(x\in U)$ 在条件属性 a 下的隶属度和非隶属度，$\mu_a: U\to[0, 1]$，$\nu_a: U\to[0, 1]$ 且满足 $0\leqslant\mu_a(x)+\nu_a(x)\leqslant 1$. 若记 $f(a)=\{f(x, a)\mid a\in AT\}$，称 $f(a)$ 为 U 上的直觉模糊集，并称 $(U, C\cup\{d\}, F, G)$ 为直觉模糊决策表，记作 DT_*.

下面给出"偏好度量"的概念，由此便可扩充为直觉模糊偏好度量序决策表.

若 $DT_*=(U, C\cup\{d\}, F, G)$ 为直觉模糊决策表，$x\in U$，$a\in C$，定义对象 x 对属性 a 的得分函数为 $S_a(x)=\alpha\mu_a(x)-\beta\nu_a(x)-\gamma\pi_a(x)$，其中 $\mu_a(x)$、和 $\nu_a(x)$ 分别为对象 x 在条件属性 a 下的隶属度和非隶属度，而 $\pi_a(x)$ 表示对象 x 在条件属性 a 下的犹豫度，且 $\pi_a(x)=1-\mu_a(x)-\nu_a(x)$，权重 α, β, γ 的值域为 $[0, 1]$，且满足 $\alpha+\beta+\gamma=1$. 这里 α, β, γ 取值都是根据具体的任务需求给定，α 为隶属度的权重，越看重隶属度，则 α 的值越大；β 为隶属度的权重，越看重非隶属度，则 β 的值越大；γ 为隶属度的权重，γ 的值则可根据 α, β 的值来确定.

设 $DT_*=(U, C\cup\{d\}, F, G)$ 为直觉模糊决策表，对任意的 $a\in C$，$f\in F$，$g\in G$，x_i，$x_j\in U$ 有：

$$f(x_i, a) \geqslant f(x_j, a) \Leftrightarrow S_a(x_i) \geqslant S_a(x_j)$$
$$f(x_i, a) \leqslant f(x_j, a) \Leftrightarrow S_a(x_i) \leqslant S_a(x_j)$$
$$g(x_i, d) \geqslant g(x_j, d)$$

则根据得分函数的大小确立了条件属性上的偏序关系，根据决策属性值的大小确立了决策属性上的偏序关系.

设$DT_* = (U, C \cup \{d\}, F, G)$为直觉模糊决策表，若存在属性 a 的值域具有偏序关系，则称该属性 a 为此系统中的一个准则，由若干个准则组成的集合称为准则集.

定义 1 对于直觉模糊决策表$DT_* = (U, C \cup \{d\}, F, G)$，若 C 为准则集，则称DT_*为直觉模糊序决策表，记为$DT_*^{\geqslant}$(本文只讨论递增偏序关系的情况，递减类似，不再赘述).

定义 2 令$DT_*^{\geqslant} = (U, C \cup \{d\}, F, G)$为直觉模糊序决策表，记 $W = (\alpha, \beta, \gamma)$为偏好向量，则称$DT_{\omega^*}^{\geqslant} = (U, C \cup \{d\}, F, G, W)$为直觉模糊偏好度量序决策表.

定义 3 若$DT_{\omega^*}^{\geqslant} = (U, C \cup \{d\}, F, G, W)$为直觉模糊偏好度量序决策表，对于 $A \subseteq C$，$A \neq \varnothing$，属性 A 的优势关系与决策属性 d 的优势关系如下：

$$R_A^{\geqslant\omega} = \{(x_i, x_j) \in U \times U \mid x_i \geqslant x_j, \forall a \in A\} =$$
$$\{(x_i, x_j) \in U \times U \mid S_a(x_i) \geqslant S_a(x_j), \forall a \in A\}$$
$$R_d^{\geqslant\omega} = \{(x_i, x_j) \in U \times U \mid g(x_i, d) \geqslant g(x_j, d), \forall a \in A\}$$

则称$R_A^{\geqslant}$，$R_d^{\geqslant}$ 为直觉模糊偏好度量优势关系. 基于以上优势关系得出优势类的定义为

$$[x_i]_A^{\geqslant\omega} = \{x_j \in U \mid (x_j, x_i) \in R_A^{\geqslant\omega}, \forall a \in A\} =$$
$$\{x_j \in U \mid S_a(x_j) \geqslant S_a(x_i), \forall a \in A\}$$
$$[x_i]_d^{\geqslant\omega} = \{x_j \mid g(x_j, d) \geqslant g(x_i, d), \forall g \in G\}$$

于是，优势关系的上、下近似定义为

$$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(X) = \{x_i \in U \mid [x_i]_A^{\geqslant\omega} \cap X \neq \varnothing\}, \underline{R_A^{\geqslant\omega}}(X) = \{x_i \in U \mid [x_i]_A^{\geqslant\omega} \subseteq X\}$$

至此，给出了直觉模糊偏好度量序决策表的相关定义，得到了该决策表基于得分函数优势关系的上、下近似.

2 直觉模糊偏好度量序决策表的近似约简理论

不同于经典的 Pawlak 粗糙集理论，本文讨论的直觉模糊偏好度量序决策表所研究的背景关系为偏序关系，而基于偏序关系的优势类构成了论域的覆盖而非划分，因此基于带偏好度量的直觉模糊序决策信息系统的近似约简与经典信息系统下的近似约简也有所不同.

下面给出直觉模糊偏好度量序决策表的上、下近似约简函数及约简.

定义 4 若$DT_*^{\geqslant\omega} = (U, C \cup \{d\}, F, G, W)$为直觉模糊偏好度量序决策表，$R_A^{\geqslant\omega}$ 和$R_d^{\geqslant\omega}$ 分别是条件属性集 A 和决策属性集$\{d\}$ 关于偏序关系的偏序类，对 $A \subseteq C$，$x_i \in U$，记：

$$U/R_A^{\geqslant} = \{[x_i]_C^{\geqslant\omega} \mid x_i \in U\}$$
$$U/R_d^{\geqslant} = \{[x_i]_d^{\geqslant\omega} \mid x_i \in U\} = \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$$
$$\sigma_A^{\geqslant\omega} = (\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_1), \overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_2), \cdots, \overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n))$$
$$\rho_A^{\geqslant\omega} = (\underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_1), \underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_2), \cdots, \underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n))$$

分别称$\sigma_A^{\geqslant\omega}$ 与$\rho_A^{\geqslant\omega}$ 为论域 U 上关于属性集 A 的上近似函数与下近似函数.

定义 5 若$DT_*^{\geqslant\omega} = (U, C \cup \{d\}, F, G, W)$为直觉模糊偏好度量序决策表，对 $A \subseteq C$，有：若$\sigma_A^{\geqslant\omega} = \sigma_C^{\geqslant\omega}$，则称 A 为上近似协调集；若$\rho_A^{\geqslant\omega} = \rho_C^{\geqslant\omega}$，则称 A 为下近似协调集. 若 A 为上近似协调集，且 A 的任意

真子集都不是上近似协调集，则称 A 为上近似约简；若 A 为下近似协调集，且 A 的任意真子集都不是下近似协调集，则称 A 为下近似约简.

显然，由上面定义可知下述性质成立.

性质 1　若$DT_{*}^{\geqslant\omega}=(U,C\cup\{d\},F,G,W)$为直觉模糊偏好度量序决策表，有：

1）属性子集 A 是上近似协调集，当且仅当对 $\forall D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}$，有$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n)=\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$.

2）属性子集 A 是下近似协调集，当且仅当对 $\forall D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}$，有$\underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n)=\underline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$.

定理 1　若$DT_{*}^{\geqslant\omega}=(U,C\cup\{d\},F,G,W)$为直觉模糊偏好度量序决策表，对 $A\subseteq C$，有：

1）当且仅当对 $\forall D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}$，$x_i\in\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$ 且 $x_j\notin\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$ 时，$\exists a_k\in A$，使得$S_{a_k}(x_i)<S_{a_k}(x_j)$，则 A 是上近似协调集.

2）当且仅当对 $\forall D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}$，$x_i\in\underline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$ 且 $x_j\notin\underline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$ 时，$\exists a_k\in A$，使得$S_{a_k}(x_i)>S_{a_k}(x_j)$，则 A 是下近似协调集.

该定理说明在协调集中不仅仅只保留了各个决策类中对象的信息，而且还保留了包含不同决策类的对象之间的交互信息，以此来保证约简之后与原决策表信息相对完整.

证　1）必要性：使用反证法.

假设 $\exists D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}$，当$x_i\in\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$且$x_j\notin\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$时，对 $\forall a_k\in A$，有$S_{a_k}(x_i)\geqslant S_{a_k}(x_j)$，即 $x_i\in[x_j]_A^{\geqslant\omega}$，故$[x_i]_A^{\geqslant\omega}\subseteq[x_j]_A^{\geqslant\omega}$.

由于 A 为上近似协调集，对 $\forall D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}$ 有$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n)=\overline{R_C^{\geqslant}}(D_n)$，所以$x_i\in\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n)$，故$[x_i]_A^{\geqslant\omega}\cap D_n\neq\varnothing$. 又因$[x_i]_A^{\geqslant\omega}\subseteq[x_j]_A^{\geqslant\omega}$，所以$[x_j]_A^{\geqslant\omega}\cap D_n\neq\varnothing$，得 $x_j\in\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$，矛盾，得证.

充分性：使用反证法.

假设 A 不是上近似协调集，则 $\exists D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}$，使$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n)\neq\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$，即 $\exists x\in\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$，但 $x\notin\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n)$，故有$[x]_C^{\geqslant\omega}\cap D_n\neq\varnothing$，$[x]_A^{\geqslant\omega}\cap D_n=\varnothing$.

又因$[x]_C^{\geqslant\omega}\subseteq[x]_A^{\geqslant\omega}$，所以$[x]_A^{\geqslant\omega}\cap D_n\neq\varnothing$，矛盾，得证.

2）与 1）同理可证.

3　直觉模糊偏好度量序决策表的近似约简方法

由于直接利用定义 5 求解上、下近似的过程比较复杂，效率低下，所以本节给出求上、下近似约简的具体判别方法，即利用辨识矩阵求上、下近似约简.

定义 6　若$DT_{*}^{\geqslant\omega}=(U,C\cup\{d\},F,G,W)$为直觉模糊偏好度量序决策表，记：

$$\overline{D^{\geqslant\omega}}=\{(x_i,x_j)\mid x_i\in\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n),\ x_j\notin\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n),\ D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}\}$$

$$\underline{D^{\geqslant\omega}}=\{(x_i,x_j)\mid x_i\in\underline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n),\ x_j\notin\underline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n),\ D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}\}$$

定义：

$$D_{\sigma}^{\geqslant\omega}(x_i,x_j)=\begin{cases}\{a_k\in C\mid S_{a_k}(x_i)<S_{a_k}(x_j)\} & (x_i,x_j)\in\overline{D^{\geqslant\omega}}\\ \varnothing & (x_i,x_j)\notin\overline{D^{\geqslant\omega}}\end{cases}$$

$$D_{\rho}^{\geqslant\omega}(x_i,x_j)=\begin{cases}\{a_k\in C\mid S_{a_k}(x_i)>S_{a_k}(x_j)\} & (x_i,x_j)\in\underline{D^{\geqslant\omega}}\\ \varnothing & (x_i,x_j)\notin\underline{D^{\geqslant\omega}}\end{cases}$$

分别称$D_{\sigma}^{\geqslant\omega}(x_i,x_j)$和$D_{\rho}^{\geqslant\omega}(x_i,x_j)$为上近似辨识属性集和下近似辨识属性集. 另记：

$$M_{\sigma}^{\geqslant\omega}=(D_{\sigma}^{\geqslant\omega}(x_i,x_j))_{|U|\times|U|}$$

$$M_{\rho}^{\geqslant\omega}=(D_{\rho}^{\geqslant\omega}(x_i, x_j))_{|U|\times|U|}$$

分别称$M_{\sigma}^{\geqslant\omega}$ 和$M_{\rho}^{\geqslant\omega}$ 为上近似辨识矩阵和下近似辨识矩阵.

定理2 若$DT_{*}^{\geqslant\omega}=(U, C\cup\{d\}, F, G, W)$为直觉模糊偏好度量序决策表，且$A\subseteq C$，则有：

1) A是上近似协调集，当且仅当对$\forall(x_i, x_j)\in\overline{D^{\geqslant\omega}}$，有$A\cap D_{\sigma}^{\geqslant\omega}(x_i, x_j)\neq\varnothing$.

2) A是下近似协调集，当且仅当对$\forall(x_i, x_j)\in\underline{D^{\geqslant\omega}}$，有$A\cap D_{\rho}^{\geqslant\omega}(x_i, x_j)\neq\varnothing$.

证 1) 必要性：由于A是上近似协调集，则由定理1可得对$\forall D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}$，$x_i\in\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$且$x_j\notin\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$时，$\exists a_k\in A$，使得$S_{a_k}(x_i)<S_{a_k}(x_j)$，即对$\forall(x_i, x_j)\in\overline{D^{\geqslant\omega}}$时，$\exists a_k\in A$，使得$S_{a_k}(x_i)<S_{a_k}(x_j)$，又因$A\subseteq C$，故对$\forall(x_i, x_j)\in\overline{D^{\geqslant\omega}}$时，有$A\cap D_{\sigma}^{\geqslant\omega}(x_i, x_j)\neq\varnothing$，得证.

充分性：因$A\subseteq C$，所以对$\forall(x_i, x_j)\in\overline{D^{\geqslant\omega}}$，有$A\cap D_{\sigma}^{\geqslant\omega}(x_i, x_j)\neq\varnothing$，对$\forall(x_i, x_j)\in\overline{D^{\geqslant\omega}}$时，$\exists a_k\in A$，有$S_{a_k}(x_i)<S_{a_k}(x_j)$，即对$\forall D_n\in U/R_d^{\geqslant\omega}$，$x_i\in\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$且$x_j\notin\overline{R_C^{\geqslant\omega}}(D_n)$时，$\exists a_k\in A$，使得$S_{a_k}(x_i)<S_{a_k}(x_j)$，由定理1得$A$是上近似协调集，得证.

2) 与1)同理可证.

定义7 若$DT_{*}^{\geqslant\omega}=(U, C\cup\{d\}, F, G, W)$为直觉模糊偏好度量序决策表，记：

$$F_{\sigma}^{\geqslant\omega}=\wedge\{\vee\{a_k \mid a_k\in D_{\sigma}^{\geqslant\omega}(x_i, x_j)\}, (x_i, x_j)\in\overline{D^{\geqslant\omega}}\}$$

$$F_{\rho}^{\geqslant\omega}=\wedge\{\vee\{a_k \mid a_k\in D_{\rho}^{\geqslant\omega}(x_i, x_j)\}, (x_i, x_j)\in\underline{D^{\geqslant\omega}}\}$$

分别称$F_{\sigma}^{\geqslant\omega}$ 和$F_{\rho}^{\geqslant\omega}$ 为该直觉模糊偏好度量序决策表的上近似辨识函数和下近似辨识函数.

定理3 若$DT_{*}^{\geqslant\omega}=(U, C\cup\{d\}, F, G, W)$为直觉模糊偏好度量序决策表，有：

1) 上近似辨识函数$F_{\sigma}^{\geqslant\omega}$ 的极小析取范式为

$$F_{\sigma}^{\geqslant\omega}=\bigvee_{n=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{q_n}a_k)$$

记$C_{\sigma}^{n}=\{a_k \mid k=1, 2, \cdots, q_n\}$，则所有上近似约简的集合为：$\{C_{\sigma}^{n} \mid n=1, 2, \cdots, m\}$.

2) 下近似辨识函数$F_{\rho}^{\geqslant\omega}$ 的极小析取范式为

$$F_{\rho}^{\geqslant\omega}=\bigvee_{n=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{q_n}a_k)$$

记$C_{\rho}^{n}=\{a_k \mid k=1, 2, \cdots, q_n\}$，则所有下近似约简的集合为：$\{C_{\rho}^{n} \mid n=1, 2, \cdots, m\}$.

证 1) 对$\forall(x_i, x_j)\in\overline{D^{\geqslant}}$，由极小析取范式的定义可得$C_{\sigma}^{n}\cap D_{\sigma}(x_i, x_j)\neq\varnothing$，由定理2得$C_{\sigma}^{n}$为上近似协调集. 若由$C_{\sigma}^{n}$去掉一个元素得$C_{\sigma}^{n*}$，则一定存在$(x_i, x_j)\in\overline{D^{\geqslant}}$，使得$C_{\sigma}^{n*}\cap D_{\sigma}(x_i, x_j)\neq\varnothing$，因而$C_{\sigma}^{n*}$不是上近似协调集，故$C_{\sigma}^{n}$为上近似约简，而$\{C_{\sigma}^{n} \mid n=1, 2, \cdots, m\}$为所有上近似约简的集合.

2) 与1)同理可证.

4 案例分析

通过上文得到了求解直觉模糊偏好度量序决策表近似约简的具体方法，下面通过一个实例来说明具体近似约简的求解过程.

设某艺术公司收到了员工交纳的一批画作，为了考察其价值将作品分成上、中、下3个等级，公司委派10位专家从4个方面(色调、意蕴、画功、风格)对这批画作进行评判，评判结果如表1所示.

表1列出的直觉模糊偏好度量序决策表中的直觉模糊数是通过专家的判断确定的. 例如对于画作x_3，要确定其画工a_3的隶属度和非隶属度，让10位专家对其投票，有2位专家觉得画作x_3的画功好，而有7位专家觉得x_3的画工不好，还有1位专家持保留意见，不做评价，这时就可以取画作x_3对画功a_3的隶属度为0.2，非隶属度为0.7，犹豫度为0.1. 而隶属度权重α和非隶属度权重β则是根据不同的问题，不同的需

求来设定，这里设定隶属度权重 $\alpha=0.5$，非隶属度权重 $\beta=0.3$，犹豫度权重 $\gamma=1-\alpha-\beta=0.2$.

于是，该公司可建立直觉模糊偏好度量决策表$DT_*^{\geqslant\omega}=(U, C\cup\{d\}, F, G, W)$，如表1所示，其中论域 $U=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$，$x_i$ 表示第i幅画作，条件属性集 $C=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，a_1，a_2，a_3，a_4 分别表示属性色调、意蕴、画功、风格，$g(x_i, d)\in\{1, 2, 3\}$，1，2，3 表示下、中、上 3 个等级，$W=(0.5, 0.3, 0.2)$.

表 1　关于画作价值的直觉模糊偏好度量序决策表

U	a_1	a_2	a_3	a_4	d
x_1	⟨0.0，0.9⟩	⟨0.2，0.7⟩	⟨0.1，0.8⟩	⟨0.2，0.8⟩	1
x_2	⟨0.7，0.2⟩	⟨0.6，0.4⟩	⟨0.6，0.2⟩	⟨0.5，0.3⟩	3
x_3	⟨0.3，0.7⟩	⟨0.2，0.8⟩	⟨0.2，0.7⟩	⟨0.1，0.6⟩	1
x_4	⟨0.6，0.3⟩	⟨0.4，0.6⟩	⟨0.5，0.5⟩	⟨0.3，0.5⟩	3
x_5	⟨0.2，0.8⟩	⟨0.4，0.5⟩	⟨0.4，0.5⟩	⟨0.3，0.6⟩	2
x_6	⟨0.5，0.4⟩	⟨0.3，0.5⟩	⟨0.6，0.3⟩	⟨0.4，0.4⟩	2

下面分别用定义和辨识矩阵两种不同方法来求解该系统的近似约简.

方法 1

计算属性 AT 下的各优势类：

$[x_1]_{AT}^{\geqslant}=\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}$　　$[x_2]_{AT}^{\geqslant}=\{x_2\}$　　$[x_3]_{AT}^{\geqslant}=\{x_2, x_3, x_4, x_6\}$

$[x_4]_{AT}^{\geqslant}=\{x_2, x_4\}$　　$[x_5]_{AT}^{\geqslant}=\{x_2, x_5\}$　　$[x_6]_{AT}^{\geqslant}=\{x_2, x_6\}$

计算：$U/R_d^{\geqslant\omega}=\{[x_i]_d^{\geqslant\omega}\mid x_i\in U\}=\{D_1, D_2, D_3\}$

$$D_1=[x_1]_d^{\geqslant\omega}=[x_3]_d^{\geqslant\omega}=U$$

$$D_2=[x_5]_d^{\geqslant\omega}=[x_6]_d^{\geqslant\omega}=\{x_2, x_4, x_5, x_6\}$$

$$D_3=[x_2]_d^{\geqslant\omega}=[x_4]_d^{\geqslant\omega}=\{x_2, x_4\}$$

再求出上、下近似：

$R_{AT}^{\geqslant\omega}(D_1)=U$　　$R_{AT}^{\geqslant\omega}(D_2)=U$　　$R_{AT}^{\geqslant\omega}(D_3)=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$\underline{R_{AT}^{\geqslant\omega}}(D_1)=U$　　$\underline{R_{AT}^{\geqslant\omega}}(D_2)=\{x_2, x_4, x_5, x_6\}$　　$\underline{R_{AT}^{\geqslant\omega}}(D_3)=\{x_2, x_4\}$

如果取 $A=\{a_1\}$，则：

$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_1)=U$　　$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_2)=U$　　$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_3)=U$

$\underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_1)=U$　　$\underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_2)=\{x_2, x_4, x_6\}$　　$\underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_3)=\{x_2, x_4\}$

此时

$$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n)\neq\overline{R_{AT}^{\geqslant\omega}}(D_n)$$

且

$$\underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n)\neq\underline{R_{AT}^{\geqslant\omega}}(D_n)$$

所以$\{a_1\}$既不是上近似协调集也不是下近似协调集.

如果取 $A=\{a_3\}$，则：

$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_1)=U$　　$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_2)=U$　　$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_3)=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$\underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_1)=U$　　$\underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_2)=\{x_2, x_4, x_5, x_6\}$　　$\underline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_3)=\{x_2, x_4\}$

此时

$$\overline{R_A^{\geqslant\omega}}(D_n)=\overline{R_{AT}^{\geqslant\omega}}(D_n)$$

且

$$\underline{R}_{A}^{\geqslant\omega}(D_n)=\underline{R}_{AT}^{\geqslant\omega}(D_n)$$

所以$\{a_3\}$既是上近似协调集，也是下近似协调集.

同理可以验证$\{a_1, a_2, a_3\}$，$\{a_2, a_3, a_4\}$，$\{a_1, a_3, a_4\}$，$\{a_1, a_3\}$，$\{a_2, a_3\}$，$\{a_3, a_4\}$，$\{a_3\}$都是上、下近似协调集，而$\{a_1, a_2, a_4\}$，$\{a_1, a_2\}$，$\{a_1, a_4\}$，$\{a_2, a_4\}$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_4\}$都不是上、下近似协调集. 由此，根据定义 5 可以求得该直觉模糊偏好度量序决策表的上近似约简和下近似约简都为$\{a_3\}$.

方法 2

首先，计算该信息系统的上、下近似辨识矩阵如表 2、表 3 所示.

表 2　决策表的上近似辨识矩阵

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	AT
x_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a_3\}$
x_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a_1, a_3, a_4\}$
x_4	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a_3, a_4\}$
x_5	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a_1, a_3, a_4\}$
x_6	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

表 3　决策表的下近似辨识矩阵

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_2	AT	$\varnothing$	AT	$\varnothing$	AT	AT
x_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_4	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\varnothing$	AT	$\varnothing$	$\{a_1, a_2, a_3\}$	AT
x_5	AT	$\varnothing$	$\{a_2, a_3, a_4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_6	AT	$\varnothing$	$\{a_1, a_3, a_4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

于是，由辨识矩阵可得：

$$F_\sigma = AT \wedge (a_1, a_3, a_4) \wedge (a_3, a_4) \wedge (a_3) = a_3$$

$$F_\rho = AT \wedge (a_1, a_2, a_3) \wedge (a_2, a_3, a_4) \wedge (a_1, a_3, a_4) = a_3$$

故得出该直觉模糊偏好度量序决策表的上、下近似约简为$\{a_3\}$. 与方法 1 求得的结果一致，这说明了 10 位专家判断画作好坏的最主要的标准是画功，这也完全符合人们的认知.

通过以上求解过程可以看出，方法 2 的复杂度明显要小于方法 1，方法 1 相对来看非常繁杂，方法 2 比较简洁，容易理解.

5　算法与实验

利用上节给出的直觉模糊偏好度量序决策表近似约简的辨识矩阵方法，进行算法设计(以下近似的约简为例，上近似类似，本文不再赘述)并给出详细数值实验.

算法 1　直觉模糊偏好度量序决策表的下近似约简算法

输入：$DT_{*}^{\geqslant\omega}=(U, C\cup\{d\}, F, G, W)$

输出：下近似约简 Red

1. 选择属性子集 $Red \leftarrow \varnothing$，$red \leftarrow \varnothing$；
2. 计算得分函数 $S_a(x)=\alpha\mu_a(x)-\beta\nu_a(x)-\gamma\pi_a(x)$；
3. for $i=1$ to $|U|$ do
4. 　$dec \leftarrow \varnothing$
5. 　for $j=1$ to $|U|$ do
6. 　　if $g(x_i, d) \geqslant g(x_j, d)$ then
7. 　　　$dec \leftarrow x_j$
8. 　　　end if
9. 　　end for
10. 　$Dec \leftarrow Dec \cup dec$
11. 　end for
12. end for //3 至 12 步为求解决策类的过程 //
13. for $i=1$ to $|U|$ do
14. 　for $j=1$ to $|U|$ do
15. 　　$M_{ij} \leftarrow \varnothing$
16. 　　for k in $\underline{R}_{AT}^{\geqslant\omega}(D)$ do
17. 　　　if $[x_i]_{AT}^{\geqslant\omega}$ in k and $[x_j]_{AT}^{\geqslant\omega}$ not in k then
18. 　　　　$M_{ij} \leftarrow A$ //$(A=\{a_k \in C \mid S_{a_k}(x_i) > S_{a_k}(x_j)\})$//
19. 　　　　break
20. 　　　end if
21. 　　end for
22. 　end for
23. end for //13 至 23 步为求辨识矩阵的过程 //
24. for $i=1$ to $|U|$ do
25. 　for $j=1$ to $|U|$ do
26. 　　if $M_{ij} \neq \varnothing$ then
27. 　　　$red \leftarrow red \cup M_{ij}$
28. 　　end if
29. 　if $i=1$ then
30. 　　$Red \leftarrow red$
31. 　end if
32. 　$Red \leftarrow Red \cap red$
33. 　end for
34. end for //24 至 34 步为根据辨识矩阵求约简的过程 //
35. end

下面对算法 1 的时间复杂度进行分析．第 2 步中，要求出每个对象对应属性下的得分函数，故其时间复杂度为 $O(|U||C|)$．第 3～12 步需要求决策类，时间复杂度为 $O(|U|^2)$，第 13～23 步为求解辨识矩阵的过程，需要遍历辨识矩阵并求解对应位置的元素，所以其时间复杂度为 $O(|U|^2|\underline{R}_{AT}^{\geqslant\omega}(D)|)$．最后 24～34 步根据辨识矩阵求约简的过程中遍历搜索辨识矩阵，时间复杂度为 $O(|U|^2)$．因此，算法的时间复杂度为 $O(|U||C|+|U|^2+|U|^2|\underline{R}_{AT}^{\geqslant\omega}(D)|+|U|^2)$．

接下来，我们通过系列实验来验证算法的有效性. 实验使用的计算机的配置如下：CPU 为 Intel(R) Cor e(TM) i5-6200U @ 2.30GHz，内存为 4GB，操作系统为 64 位 Windows 10. 环境采用 Python 平台. 数据集为 UCI machine learning repository 的 8 个数据集，如表 4 所示.

表 4 数据集总览

No.	数据集	样本数	特征数	分类数
1	Caesarian Section Classification Dataset	79	4	2
2	Iris	150	4	3
3	Wine	176	13	3
4	Connectionist Bench	208	60	2
5	Libras Movement	360	91	15
6	Blood Transfusion Service Center	748	4	2
7	banknote authentication	1 372	4	2
8	Contraceptive Method Choice	1 473	10	3

根据算法 1，求出以上数据集的约简，并使用该约简分别通过 KNN 和 SVM 两个分类器进行分类，求出其分类的精度，得到的精度如表 5 所示.

表 5 在 KNN 与 SVM 下所得约简的分类精度 %

No.	数据集	KNN	SVM
1	Caesarian Section Classification Dataset	93.75±1.16	82.53±4.96
2	Iris	76.66±6.33	85.83±1.23
3	Wine	97.22±0.31	94.28±1.67
4	Connectionist Bench	71.42±4.95	73.85±3.24
5	Libras Movement	75.27±3.48	91.65±0.98
6	Blood Transfusion Service Center	73.33±7.93	86.26±4.8
7	banknote authentication	87.09±2.44	89.91±5.91
8	Contraceptive Method Choice	51.18±3.17	88.57±0.3
	平均分类精度	78.24±3.72	86.61±2.89

通过表 5 中的实验结果可以看到，对算法 1 得到的约简进行分类，不论采用是 KNN 算法分类还是采用 SVM 算法分类，分类精度都保持在一个较高的水平，其平均精度分别为 78.24 和 86.61，结果较可观.

6 结论

本文在序决策表的基础上引入了直觉模糊集以及偏好度量，从而序决策表拓展为直觉模糊偏好度量序决策表. 本文进一步研究了基于直觉模糊偏好度量序决策表的近似约简，并得出了近似约简的判定定理、性质及其辨识矩阵，给出了求解直觉模糊偏好度量序决策表的近似约简的具体方法步骤，最后通过案例对比分析了两种求近似约简的方法，并且通过实际数值实验验证了其有效性，为对这类复杂的决策表进行数据分析提供了新的理论基础.

参考文献：

[1] PAWLAK Z. Rough Sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.
[2] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集 [M]. 北京：科学出版社，2013.

[3] 林冰雁，徐伟华，杨倩. 带偏好度量的直觉模糊序决策信息系统的部分一致约简 [J]. 计算机科学，2018，45(1)：148-151，187.

[4] 袁修久，张文修. 模糊目标信息系统的属性约简 [J]. 系统工程理论与实践，2004，24(5)：116-120，125.

[5] 桑彬彬，徐伟华. 直觉模糊序决策信息系统的分配约简 [J]. 计算机科学，2017，44(S1)：75-79.

[6] 徐伟华，王巧荣，张先韬. 不协调格值目标信息系统的近似约简 [J]. 计算机工程，2011，37(23)：69-71，74.

[7] 徐伟华，张文修. 基于优势关系下的协调近似空间 [J]. 计算机科学，2005，32(9)：164-165.

[8] 徐伟华，张文修. 基于优势关系下不协调目标信息系统的知识约简 [J]. 计算机科学，2006，33(2)：182-184.

[9] 张文修，米据生，吴伟志. 不协调目标信息系统的知识约简 [J]. 计算机学报，2003，26(1)：12-18.

[10] 张晓燕，徐伟华，张文修. 序目标信息系统中分布约简的矩阵算法 [J]. 重庆理工大学学报(自然科学版)，2010，24(3)：56-61.

[11] ATANASSOV K T. Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems，1980，20(1)：87-96.

[12] ZADEHL A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control，1965，8(3)：338-353.

[13] NANDA S. MAJUMDAR S. Fuzzy Rough Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems，1992，45(2)：157-160.

[14] DU W S. Subtraction and Division Operations on Intuitionistic Fuzzy Sets Derived From the HammingDistance [J]. Information Sciences，2021，571(9)：206-224.

[15] 梁美社，米据生，冯涛. 广义优势多粒度直觉模糊粗糙集的属性约简 [J]. 计算机科学，2018，45(10)：54-58，77.

[16] YANG Y，LI H，ZHANG Z M. et al. Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Analytic Network Process [J]. Information Sciences，2020，526(7)：102-118.

[17] 胡猛，李蒙蒙，徐伟华. 直觉模糊序信息系统下变精度与程度的“逻辑且”粗糙集 [J]. 计算机科学，2017，44(5)：206-210，225.

[18] SANG B B，CHEN H M，LI T R. et al. Incremental Approaches for Heterogeneous Feature Selection in Dynamic Ordered Data [J]. Information Sciences，2020(12)，541：475-501.

[19] SANG B，CHEN H M，YANG L. et al. Incremental Feature Selection Using a Conditional Entropy Based on Fuzzy Dominance Neighborhood Rough Sets [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2022，30(6)：1683-1697.

[20] 谢德华，刘财辉，凌敏. 局部多粒度覆盖粗糙集 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：1-9.

[21] HU M，TSANG E C C，GUO Y T. et al. A Novel Approach to Attribute Reduction Based on Weighted Neighborhood Rough Sets [J]. Knowledge-Based Systems，2021，220：106908.

[22] 孙文鑫，刘玉锋. 一般多粒度直觉模糊粗糙集模型 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(6)：8-18.

责任编辑　汤振金