

DOI:10.3979/j.issn.1673-825X.202207200184

# 模糊三支概念簇的理论与实践

徐伟华,林玉飞

(西南大学 人工智能学院,重庆 400039)

**摘要:**三支概念簇刻画的是具有家族相似性的三支概念集合。三支概念簇中的三支概念包含了对象共同具有和共同不具有的属性,但三支概念不能表达模糊的信息,不能解决模糊形式背景下的问题。将模糊三支概念分析和现代范畴理论相结合,提出了模糊三支概念簇;讨论了模糊三支概念簇的基本性质和运算方法;提出了一个在模糊形式背景下利用模糊三支概念簇查找相似对象的算法,将所提出的算法应用到新型冠状病毒感染疑似病例检索,取得了符合实际的实验结果。经过分析可知,模糊三支概念簇的应用场景更加广泛。

**关键词:**三支概念簇;现代范畴理论;模糊三支概念分析;信息检索;模糊三支概念簇

中图分类号:TP18

文献标志码:A

文章编号:1673-825X(2023)01-0040-09

## Theory and practice of fuzzy three-way concept cluster

XU Weihua, LIN Yufei

(College of Artificial Intelligence, Southwest University, Chongqing 400715, P. R. China)

**Abstract:** The three-way concept cluster describes the three-way concept collection with family similarity. The three-way concepts in the three-way concept cluster include the properties that objects have and do not have in common, but the three-way concepts cannot express ambiguous information and cannot solve problems in the fuzzy form context. Firstly, this paper combines the fuzzy three-way concept analysis with modern category theory, and proposes fuzzy three-way concept clusters. Secondly, the basic properties and operation methods of fuzzy three-way concept clusters are discussed. Finally, an algorithm is proposed to find similar objects using fuzzy three-way concept clusters in the fuzzy form context. The proposed algorithm was applied to the retrieval of suspected cases of COVID-19, and practical experimental results were obtained. After analysis, it can be seen that the application scenarios of fuzzy three-way concept clusters are more extensive.

**Keywords:** three-way concept cluster; modern category theory; fuzzy three-way concept analysis; information retrieval; fuzzy three-way concept cluster

## 0 引言

1982年,德国教授 Wille<sup>[1]</sup>提出了形式概念分析,奠定了从形式背景中获取概念的理论基础,自形式概念分析理论提出到现在,其已经被广泛应用于

数据挖掘、数据处理、概念认知以及人工智能等领域<sup>[2-5]</sup>。经典的概念格刻画了对象和属性的内在关系,即共同具有的问题。三支决策理<sup>[6-7]</sup>是姚一豫提出的以“三分而治”为主要思想的一个决策理论;夏月月<sup>[8]</sup>提出一种结合三支决策理论的改进算法

收稿日期:2022-07-20 修订日期:2022-12-05 通讯作者:徐伟华 chxuwh@swu.edu.cn

基金项目:国家自然科学基金(61976245)

Foundation Item:The National Natural Science Foundation of China (61976245)

TK-means。在实际应用中还存在共同不具有的情况,为了解决对象和属性之间共同不具有的问题,J.J.Qi 等<sup>[9]</sup>将三支决策理论和形式概念分析理论结合提出三支概念分析;J.J.Qi 等<sup>[10]</sup>分析比较了经典概念格和三支概念格之间的性质与关系;汪文威等<sup>[11]</sup>提出了一个新的构造三支概念格的算法,提高了三支概念格的构造效率;史建坤等<sup>[12]</sup>提出基于对象导出三支概念格的冲突分析方法,并且能够依据冲突分析的结果直接进行决策。

模糊集合论<sup>[13]</sup>是用来表达模糊性概念的集合,模糊理论从提出以来在很多领域都有实际的应用。在这些应用领域中,对象和属性的关系是模糊的,经典的三支概念分析不能继续适用。龙柄翰等<sup>[14]</sup>将三支概念分析理论和模糊理论相结合提出了模糊三支概念理论,解决了此问题,并在给定模糊形式背景下讨论了模糊三支概念格;毛华等<sup>[15]</sup>通过对模糊概念格与模糊三支概念格的研究,用等价类的方法得到了给定信息背景下模糊概念与模糊三支概念之间的对应关系;徐伟华等<sup>[16]</sup>讨论了模糊三支概念的概念认知学习方法,实现了不完备模糊三支概念的认知学习;毛华等<sup>[17]</sup>将半概念和模糊三支概念理论结合在一起,提出了模糊三支半概念,对模糊三支概念理论进行了补充。

现代范畴理论<sup>[18-19]</sup>强调家族相似概念,是由美国心理学家 Rosch 在大量实验结果的基础上,通过实证研究提出的。现代范畴理论自提出以来,理论研究不断完善,并且有广泛的应用。徐淑平等<sup>[20]</sup>研究讨论了现代范畴理论和经典范畴理论的关系;李小飞等<sup>[21]</sup>将范畴是静止不变的和范畴是动态构造的这 2 种观点进行了比较分析;岳好平等<sup>[22]</sup>以现代范畴理论为出发点,分析了网络流行语的基本范畴,让人们在网络流行语的内涵有一个更清楚的认识;智慧来等<sup>[23]</sup>受现代范畴理论的启发,将现代范畴理论与形式概念分析理论相结合首次提出了概念簇,并利用概念簇理论获取概念,但只考虑到这些概念中的对象具有共同的属性,没有考虑到对象和属性之间共同不具有的问题;为了解决这个问题,智慧来等<sup>[24]</sup>在概念簇的基础上将三支概念分析理论加入其中进行改进,提出了三支概念簇。

在生活中,存在许多模糊的、复杂的、不确定的信息,因此,对象和属性之间的关系是模糊的,在之前所提出的概念簇理论中,无法解决此类问题。为了解决对象和属性关系是模糊的问题,本文在现代

范畴理论的基础之上,结合了模糊三支概念分析理论,提出了模糊三支概念簇,此理论更适用于实际生活的信息检索。模糊三支概念簇中的模糊三支概念通过相似性联系在一起,模糊三支概念簇的范围可以根据需求扩大或缩小,里面的模糊三支概念也可以随之改变,从而可以在一些特定的检索中提升检索效率。

## 1 基础知识

### 1.1 形式概念分析

**定义 1** 设  $F=(G, M, I)$  为一个形式背景,其中,  $G=\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  表示对象集,  $M=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  表示属性集,  $I$  为二元关系,表示  $G$  与  $M$  之间的二元关系。若  $x \in G, a \in M$ , 记  $xIa$  或  $(x, a) \in I$  当且仅当对象  $x$  具有属性  $a$  或者属性  $a$  被对象  $x$  拥有。

对于形式背景  $F=(G, M, I), X \subseteq G, A \subseteq M$ , 定义  $*$  算子, 表示为  $X^* = \{a \mid a \in M, \forall x \in X, (x, a) \in I\}, A^* = \{x \mid x \in G, \forall a \in A, (x, a) \in I\}$ 。

**定义 2** 设  $F=(G, M, I)$  为一个形式背景,  $X \subseteq G, A \subseteq M$ 。若  $X^* = A$  且  $A^* = X$ , 则称  $(X, A)$  为一形式概念, 简称为概念。其中,  $X$  称为概念  $(X, A)$  的外延,  $A$  称为概念  $(X, A)$  的内涵<sup>[25]</sup>。

在文献[25]中对  $*$  算子的性质进行了归纳讨论,并给出了相应的证明。

### 1.2 模糊三支概念分析

形式概念分析讨论了一个对象拥有一个属性,三支概念分析是在形式概念分析的基础上做了一个补充,在讨论共同拥有的情况下,还考虑到共同不拥有的情况,模糊三支概念分析的出现是因为三支概念分析不能表达模糊的关系,而在现实生活中有许多信息是模糊的,下面介绍有关模糊三支概念分析的相关内容。

**定义 3** 模糊形式背景设  $\tilde{F}=(G, M, \tilde{I})$  为一个模糊形式背景。其中,  $G$  为所有对象的集合,  $M$  为所有属性的集合,  $\tilde{I}$  为一个在域  $G \times M$  上定义的模糊集。对于  $\forall (x, a) \in G \times M$ , 有  $0 \leq \mu(x, a) \leq 1$ 。

**定义 4** 给定一个模糊形式背景  $\tilde{F}=(G, M, \tilde{I})$  以及一个阈值  $\alpha, X \subseteq G, A \subseteq M$ 。  $\varphi(X)$  和  $\varphi(A)$  为  $X$  与  $A$  上的模糊集。定义模糊正算子  $\tilde{*}$  为

$$X^{\tilde{*}} = \{(a, \mu(X, a)) \mid a \in M, \forall x \in X, \mu(x, a) \geq \alpha\},$$

$$\begin{aligned} \varphi(X)^{\bar{*}} &= \{a \mid a \in M, \forall x \in X, \mu(x, a) \geq \alpha\}, \\ A^{\bar{*}} &= \{(x, \mu(X, a)) \mid x \in G, \forall a \in A, \mu(x, a) \geq \alpha\}, \\ \varphi(A)^{\bar{*}} &= \{x \mid x \in G, \forall a \in A, \mu(x, a) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

模糊负算子  $\bar{*}$  为

$$\begin{aligned} X^{\bar{*}} &= \{(a, \mu(X, a)) \mid a \in M, \forall x \in X, \mu(x, a) < \alpha\}, \\ \varphi(X)^{\bar{*}} &= \{a \mid a \in M, \forall x \in X, \mu(x, a) < \alpha\}, \\ A^{\bar{*}} &= \{(x, \mu(X, a)) \mid x \in G, \forall a \in A, \mu(x, a) < \alpha\}, \\ \varphi(A)^{\bar{*}} &= \{x \mid x \in G, \forall a \in A, \mu(x, a) < \alpha\}. \end{aligned}$$

结合正算子  $\bar{*}$  与负算子  $\bar{*}$ , 定义在  $X$  与  $A$  上一对模糊三支算子  $\langle \cdot \rangle$  为  $X^{\langle \cdot \rangle} = (X^{\bar{*}}, X^{\bar{*}})$ ,  $A^{\langle \cdot \rangle} = (A^{\bar{*}}, A^{\bar{*}})$ 。

对以上三支算子, 可以逆定义算子  $\cdot \rangle$  为  $(\varphi(X), \varphi(Y)) \cdot \rangle = \{a \in M \mid a \in \varphi(X)^{\bar{*}}, a \in \varphi(Y)^{\bar{*}}\}$ ,  $(\varphi(A), \varphi(B)) \cdot \rangle = \{x \in G \mid x \in \varphi(A)^{\bar{*}}, x \in \varphi(B)^{\bar{*}}\}$ 。

**定义 5** 给定一个模糊形式背景  $\tilde{F} = (G, M, \tilde{I})$  和一个阈值  $\alpha$ ,  $X, Y \subseteq G, A \subseteq M, a \subseteq M$  记  $\varphi(X) = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n))\}$ ,  $x_i \in X$ 。其中,  $\mu_A(x) = \mu_{a_1}(x) \cap \mu_{a_2}(x) \cap \dots \cap \mu_{a_n}(x)$ 。

若  $A^{\langle \cdot \rangle} = (\varphi(X), \varphi(Y))$  且  $(\varphi(X), \varphi(Y)) \cdot \rangle = A$ , 则称  $(\varphi(X), \varphi(Y), A)$  为属性导出模糊三支概念, 简称模糊 AE 概念。称  $(a^{\bar{*}}, a^{\bar{*}\langle \cdot \rangle})$  为 I 型属性诱导的模糊三支概念,  $(a^{\bar{*}}, a^{\bar{*}\langle \cdot \rangle})$  为 II 型属性诱导的模糊三支概念。

**定义 6** 给定一个模糊形式背景  $\tilde{F} = (G, M, \tilde{I})$  及一个阈值  $\alpha$ ,  $X \subseteq G, A, B \subseteq M$  记  $\varphi(A) = \{(a_1, \mu_a(X)), (a_2, \mu_a(X)), \dots, (a_n, \mu_a(X))\} \mid a_i \in A$ 。其中,  $\mu_a(X) = \mu_a(x_1) \cap \mu_a(x_2) \cap \dots \cap \mu_a(x_n)$ 。

若  $X^{\langle \cdot \rangle} = (\varphi(A), \varphi(B))$  且  $(\varphi(A), \varphi(B)) \cdot \rangle = X$ , 则称  $(X, (\varphi(A), \varphi(B)))$  为对象导出模糊三支概念, 简称模糊 OE-概念。OEFL( $\tilde{F}$ ) 表示由形式背景  $\tilde{F} = (G, M, \tilde{I})$  生成的所有模糊 OE-概念构成的对象导出模糊三支概念格。

### 1.3 三支概念簇

三支概念簇刻画了具有相同家族相似性的三支概念的集合, 为了描述三支概念簇, 首先要给出三支概念簇的定义。

给定一个形式背景  $K = (G, M, I), X \subseteq G, A, B \subseteq M$ , 对象集合属性集上的负算子分别定义为  $X^{\bar{*}} = \{a \in M \mid \forall x \in X, I(x, a) = 0\}$ ,  $B^{\bar{*}} = \{x \in G \mid \forall a \in B, I(x, a) = 0\}$ 。

**定义 7** 给定一个形式背景  $K = (G, M, I), X \subseteq G, A, B \subseteq M$ , 定义对象导出三支算子为  $X^{\triangleleft} = (X^*, X^{\bar{*}})$ ,  $(A, B)^{\triangleright} = \{x \in G \mid x \in A^* \text{ 且 } x \in B^{\bar{*}}\} = A^* \cap B^{\bar{*}}$ 。

进一步, 若  $X^{\triangleleft} = (A, B)$  且  $(A, B)^{\triangleright} = X$ , 则称  $(X, (A, B))$  为对象导出三支概念, 简称为 OE 概念。

**定义 8** 给定一个形式背景  $K = (G, M, I), x \in G, a \in M$ , 称  $(x^{\triangleleft \triangleright}, x^{\triangleleft})$  为对象诱导的三支概念; 称  $(a^*, a^{*\triangleleft})$  为 I 型属性诱导的三支概念, 称  $(a^{\bar{*}}, a^{\bar{*}\triangleleft})$  为 II 型属性诱导的三支概念。

对象导出三支概念格是由形式背景  $K$  的全体对象导出的三支概念构成, 记为  $OEL(K)$ 。

**定义 9** 给定一个形式背景  $K = (G, M, I), x \in G, a \in M$ , 若  $t(x, a) = \{(X, (A, B)) \in OEL(K) \mid (x^{\triangleleft \triangleright}, x^{\triangleleft}) \leq (X, (A, B)) \leq (a^*, a^{*\triangleleft})\} \neq \emptyset$ , 则称  $t(x, a)$  为对象  $x$  和属性  $a$  诱导的 I 型三支概念簇。

**定义 10** 给定一个形式背景  $K = (G, M, I), x \in G, a \in M$ 。若  $t(x, a^{\bar{*}}) = \{(X, (A, B)) \in OEL(K) \mid (x^{\triangleleft \triangleright}, x^{\triangleleft}) \leq (X, (A, B)) \leq (a^{\bar{*}}, a^{\bar{*}\triangleleft})\} \neq \emptyset$ , 则称  $t(x, a^{\bar{*}})$  为对象  $x$  和属性  $a$  诱导的 II 型三支概念簇。

## 2 模糊三支概念簇

在现实生活中, 许多信息是模糊的、不确定的, 经典的形式概念分析和三支概念分析不能处理这些信息, 进而将模糊集合理论与三支概念分析相结合形成模糊三支概念分析。概念簇和三支概念簇分别是建立在经典概念格和三支概念格上的, 用来寻找一组具有家族相似性的概念, 在实际应用中, 信息是模糊的、不确定的, 之前提出的有关概念簇的理论不能解决这个问题, 为了解决这个问题, 我们提出了模糊三支概念簇, 用来寻找一组具有家族相似性的模糊三支概念, 进一步完善概念簇的相关理论体系。

### 2.1 模糊三支概念簇的定义

**定义 11** 给定一个模糊形式背景  $\tilde{F} = (G, M, \tilde{I}), x \in G, a \in M$ 。若  $f(x, a) = \{(x, (\varphi(A), \varphi(B))) \in OEFL(\tilde{F}) \mid (x^{\langle \cdot \rangle}, x^{\langle \cdot \rangle}) \leq (x, (\varphi(A), \varphi(B))) \leq (a^{\bar{*}}, a^{\bar{*}\langle \cdot \rangle})\} \neq \emptyset$ , 则称  $f(x, a)$  为对象  $x$  和属性  $a$  诱导的 I 型模糊三支概念簇。

**定义 12** 给定一个模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$ ,  $x \in G, a \in M$ . 若  $f(x, a^-) = \{(x, (\varphi(A), \varphi(B))) \in OEFL(\tilde{F}) \mid (x^{(\cdot)}, x^{(\cdot)}) \leq (x, \varphi(A), \varphi(B)) \leq (a^{\bar{\cdot}}, a^{\bar{\cdot}})\} \neq \emptyset$ , 则称  $f(x, a^-)$  为对象  $x$  和属性  $a$  诱导的 II 型模糊三支概念簇。

**定义 13** 给定一个模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$ ,

$x \in G, a \in M$ , 称  $f(x, \emptyset)$  为对象  $x$  的诱导的模糊三支概念簇, 称  $f(\emptyset, a)$  为属性  $a$  诱导的 I 型模糊三支概念簇, 称  $f(\emptyset, a^-)$  为属性  $a$  诱导的 II 型模糊三支概念簇。

上述给出了模糊三支概念簇的定义, 为了更好地理解模糊三支概念簇, 用图 1 来描述模糊三支概念簇。

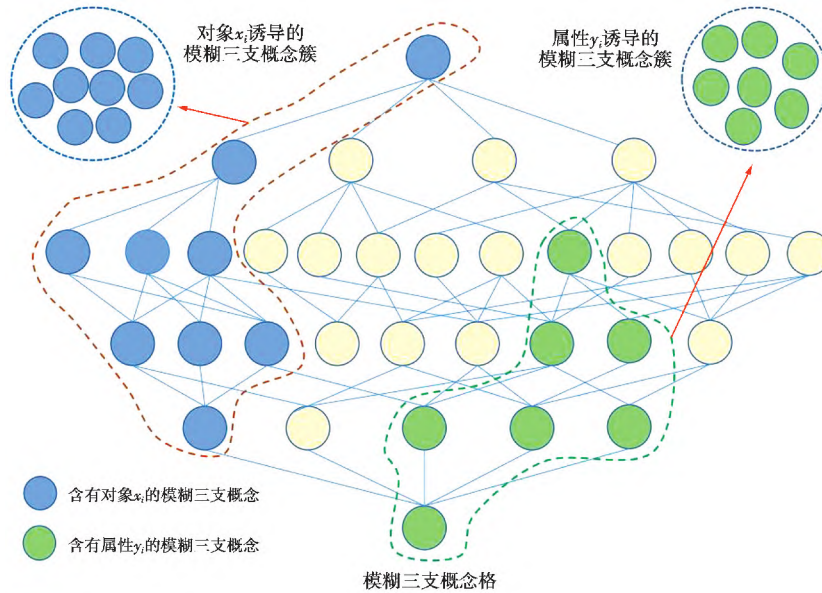


图 1 模糊三支概念簇示意图

Fig.1 Schematic diagram of fuzzy three-way concept cluster

为了进一步理解模糊三支概念簇, 给出一个计算模糊三支概念簇的具体例子, 详见例 1。

**例 1** 表 1 是由对象集  $G = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  和属性集  $M = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  构成的模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$ 。

表 1 模糊形式背景

Tab.1 Fuzzy Formal context

对象集	属性集			
	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$x_1$	0.5	0	0.5	1
$x_2$	0	0.5	0	0
$x_3$	1	0.5	0	0.5
$x_4$	0.5	1	0.5	0

在本例中, 计算模糊三支概念所选取的  $\alpha = 0.5$ 。

在模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$  下, 计算对象  $x_1, x_2, x_3, x_4$  诱导的模糊三支概念簇, 结果如下。

对象  $x_1$  诱导的模糊三支概念簇  $f(x_1, \emptyset) = \{(x_1, (\{y_1, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}, \{y_4, 1\}), (\{y_2, 0\})), (x_1, x_3, (\{y_1, 0.5\}, \{d, 0.5\}), \emptyset), (x_1, x_4,$

$(\{y_1, 0.5\}, \{c, 0.5\}), \emptyset), (x_1, x_3, x_4, (\{y_1, 0.5\}), \emptyset), (x_1, x_2, x_3, x_4, (\emptyset, \emptyset))\}$ 。

对象  $x_2$  诱导的模糊三支概念簇  $f(x_2, \emptyset) = \{(x_2, (\{b, 0.5\}, (\{y_1, 0\}, \{y_3, 0\}, \{y_4, 0\})), (x_2, x_3, (\{b, 0.5\}, (\{y_3, 0\}))), (x_2, x_4, (\{y_2, 0.5\}), (\{y_4, 0\})), (x_2, x_3, x_4, (\{b, 0.5\}), \emptyset), (x_1, x_2, x_3, x_4, (\emptyset, \emptyset))\}$ 。

对象  $x_3$  诱导的模糊三支概念簇  $f(x_3, \emptyset) = \{(x_3, (\{y_1, 1\}, \{y_2, 0.5\}, \{y_4, 1\}), (\{y_3, 0\})), (x_1, x_3, (\{y_1, 0.5\}, \{y_4, 0.5\}), \emptyset), (x_3, x_4, (\{y_1, 0.5\}, \{y_2, 0.5\}), \emptyset), (x_2, x_3, (\{y_2, 0.5\}), (\{y_3, 0\})), (x_1, x_3, x_4, (\{y_1, 0.5\}), \emptyset), (x_2, x_3, x_4, (\{y_2, 0.5\}), \emptyset), (x_1, x_2, x_3, x_4, (\emptyset, \emptyset))\}$ 。

对象  $x_4$  诱导的模糊三支概念簇  $f(x_4, \emptyset) = \{(x_4, (\{y_1, 0.5\}, \{b, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), (\{y_4, 0\})), (x_1, x_4, (\{y_1, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), \emptyset), (x_3, x_4, (\{y_1, 0.5\}, \{y_2, 0.5\}), \emptyset), (x_2, x_4, (\{y_2, 0.5\}), (\{y_4, 0\})), (x_1, x_3, x_4, (\{y_1, 0.5\}), \emptyset), (x_2, x_3, x_4, (\{y_2, 0.5\}), \emptyset), (x_1, x_2, x_3, x_4, (\emptyset, \emptyset))\}$ 。

在模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$  下, 计算属性  $y_1 y_2 y_3 y_4$  诱导的 I 型模糊三支概念簇, 结果如下。

属性  $y_1$  诱导的 I 型模糊三支概念簇  $f(\emptyset, y_1) = \{(x_1 x_3 x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \emptyset)), (x_1 x_3, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_4, 0.5\}), \emptyset)), (x_1 x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), \emptyset)), (x_3 x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_2, 0.5\}), \emptyset)), (x_1, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}, \{y_4, 1\}), (\{y_2, 0\}))), (x_3, ((\{y_1, 1\}, \{b, 0.5\}, \{y_4, 1\}), (\{y_3, 0\}))), (x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_2, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), (\{y_4, 0\}))), (\emptyset, (y_1 y_2 y_3 y_4, y_1 y_2 y_3 y_4))\}$ 。

属性  $y_2$  诱导的 I 型模糊三支概念簇  $f(\emptyset, y_2) = \{(x_2 x_3 x_4, ((\{y_2, 0.5\}), \emptyset)), (x_2, ((\{y_2, 0.5\}), (\{y_1, 0\}, \{y_3, 0\}, \{y_4, 0\}))), (x_3 x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_2, 0.5\}), \emptyset)), (x_3, ((\{y_1, 1\}, \{y_2, 0.5\}, \{y_4, 1\}), (\{y_3, 0\}))), (x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_2, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), (\{y_4, 0\}))), (\emptyset, (y_1 y_2 y_3 y_4, y_1 y_2 y_3 y_4))\}$ 。

属性  $y_3$  诱导的 I 型模糊三支概念簇  $f(\emptyset, y_3) = \{(x_1 x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), \emptyset)), (x_2 x_3, ((\{y_2, 0.5\}), (\{y_3, 0\}))), (x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_2, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), (\{y_4, 0\}))), (x_1, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}, \{y_4, 1\}), (\{y_2, 0\}))), (\emptyset, (y_1 y_2 y_3 y_4, y_1 y_2 y_3 y_4))\}$ 。

属性  $y_4$  诱导的 I 型模糊三支概念簇  $f(\emptyset, y_4) = \{(x_1 x_3, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_4, 0.5\}), \emptyset)), (x_3, ((\{y_1, 1\}, \{y_2, 0.5\}, \{y_4, 1\}), (\{y_3, 0\}))), (x_1, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}, \{y_4, 1\}), (\{y_2, 0\}))), (\emptyset, (y_1 y_2 y_3 y_4, y_1 y_2 y_3 y_4))\}$ 。

在模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$  下, 计算属性  $y_1 y_2 y_3 y_4$  诱导的 II 型模糊三支概念簇, 结果如下。

属性  $y_1$  诱导的 II 型模糊三支概念簇  $f(\emptyset, y_1^-) = \{(x_2, ((\{y_2, 0.5\}), (\{y_1, 0\}, \{y_3, 0\}, \{y_4, 0\}))), (\emptyset, (y_1 y_2 y_3 y_4, y_1 y_2 y_3 y_4))\}$ 。

属性  $y_2$  诱导的 II 型模糊三支概念簇  $f(\emptyset, y_2^-) = \{(x_1, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}, \{y_4, 1\}), (\{y_2, 0\}))), (\emptyset, (y_1 y_2 y_3 y_4, y_1 y_2 y_3 y_4))\}$ 。

属性  $y_3$  诱导的 II 型模糊三支概念簇  $f(\emptyset, y_3^-) = \{(x_3, ((\{y_1, 1\}, \{y_2, 0.5\}, \{y_4, 1\}), (\{y_3, 0\}))), (x_2 x_3, ((\{y_2, 0.5\}), (\{y_3, 0\}))), (\emptyset, (y_1 y_2 y_3 y_4, y_1 y_2 y_3 y_4))\}$ 。

属性  $y_4$  诱导的 II 型模糊三支概念簇  $f(\emptyset, y_4^-) = \{(x_2 x_4, ((\{y_2, 0.5\}), (\{y_4, 0\}))), (x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_2, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), (\{y_4, 0\}))), (x_2, ((\{y_2, 0.5\}), (\{y_1, 0\}, \{y_3, 0\}, \{y_4, 0\}))), (\emptyset, (y_1 y_2 y_3 y_4, y_1 y_2 y_3 y_4))\}$ 。

$(\emptyset, (y_1 y_2 y_3 y_4, y_1 y_2 y_3 y_4))\}$ 。

以上是在模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$  下, 属性和对象诱导模糊三支概念簇的计算结果。

### 2.2 模糊三支概念簇的性质

**性质 1** 给定一个模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$ ,  $x \in G, a \in M$ 。模糊三支概念簇  $f(x, a)$  和  $f(x, a^-)$  都是  $OEFL(\tilde{F})$  的子格。

证明: 首先, 证明  $f(x, a)$  是有限的, 且包含于  $OEFL(\tilde{F})$ ; 其次, 需要证明  $f(x, a)$  中存在最大元和最小元。

由模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$  的有限性可知,  $f(x, a)$  是有限的; 由  $f(x, a)$  的定义式可知,  $f(x, a)$  中存在唯一的最大元  $(a^{\bar{\cdot}}, a^{\bar{\cdot}(x)})$  和唯一的最小元  $(x^{\langle \cdot \rangle}, x^{\langle \cdot \rangle})$ 。

综上所述,  $f(x, a)$  是  $OEFL(\tilde{F})$  的子格。

**性质 2** 给定一个模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$ ,  $x \in G, a \in M$ , 以下命题成立。

- ①  $f(x, a) = f(x, \emptyset) \cap f(\emptyset, a)$ ;
- ②  $f(x, a^-) = f(x, \emptyset) \cap f(\emptyset, a^-)$ 。

证明:

$$1) f(x, \emptyset) = \{(x, (\varphi(A), \varphi(B))) \in OEFL(\tilde{F}) \mid (x^{\langle \cdot \rangle}, x^{\langle \cdot \rangle}) \leq (x, (\varphi(A), \varphi(B))) \leq (G, G^{\langle \cdot \rangle})\},$$

$$f(\emptyset, a) = \{(x, (\varphi(A), \varphi(B))) \in OEFL(\tilde{F}) \mid (\varphi^{\langle \cdot \rangle}, \varphi^{\langle \cdot \rangle}) \leq (x, (\varphi(A), \varphi(B))) \leq (a^{\bar{\cdot}}, a^{\bar{\cdot}(x)})\}。$$

结合上述 2 式及  $f(x, a)$  的定义式可证得  $f(x, a) = f(x, \emptyset) \cap f(\emptyset, a)$  成立, 即命题①成立。

2) 类似可以证明命题②也成立, 证毕。

性质 2 给出了计算一个具体的对象和属性诱导的模糊三支概念簇的方法, 可以通过对应的对象诱导的模糊三支概念簇和属性诱导的模糊三支概念簇取交集获得。

例如, 计算对象  $x_4$  和属性  $y_4$  诱导的 II 型模糊三支概念簇,  $f(x_4, y_4^-) = f(x_4, \emptyset) \cap f(\emptyset, y_4^-) = \{(x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{b, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), (\{y_4, 0\}))), (x_1 x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), \emptyset)), (x_3 x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_2, 0.5\}), \emptyset)), (x_2 x_4, ((\{y_2, 0.5\}), (\{y_4, 0\}))), (x_1 x_3 x_4, ((\{y_1, 0.5\}), \emptyset)), (x_2 x_3 x_4, ((\{y_2, 0.5\}), \emptyset)), (x_1 x_2 x_3 x_4, (\emptyset, \emptyset))\} \cap \{(x_2 x_4, ((\{y_2, 0.5\}), (\{y_4, 0\}))), (x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{y_2, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), (\{y_4, 0\}))), (x_2, ((\{y_2, 0.5\}), (\{y_1, 0\}, \{y_3, 0\}, \{y_4, 0\}))), (\emptyset, (y_1 y_2 y_3 y_4, y_1 y_2 y_3 y_4))\}$ 。

$(y_1y_2y_3y_4, y_1y_2y_3y_4))\} \circ f(x_4, y_4^-) = \{(x_4, ((\{y_1, 0.5\}, \{b, 0.5\}, \{y_3, 0.5\}), (\{y_4, 0\}))), (x_2x_4, ((\{y_2, 0.5\}), (\{y_4, 0\})))\}$ 。

**性质 3** 给定一个模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$ ,  $x \in G, a \in M$ , 以下命题成立。

- ①若  $\tilde{I}(x, a) = 0$ , 则  $f(x, a) = \emptyset$ ;
- ②若  $\tilde{I}(x, a) = 1$ , 则  $f(x, a^-) = \emptyset$ ;
- ③  $OEFL(\tilde{F}) = (\bigcup_{x \in G} t(x, \emptyset)) \cup (\varphi, \varphi^{\langle \cdot \rangle})$ ;
- ④  $OEFL(\tilde{F}) = (\bigcup_{a \in M} f(\emptyset, a) \cup f(\varphi, a^-)) \cup (G, G^{\langle \cdot \rangle})$ 。

证明:

1) 若  $\tilde{I}(x, a) = 0$ , 则概念  $(a^{\bar{\cdot}}, a^{\bar{\cdot}\langle \cdot \rangle})$  和  $(x^{\langle \cdot \cdot \rangle}, x^{\langle \cdot \rangle})$  是不可比的, 所以  $OEFL(\tilde{F})$  中不存在小于等于  $(a^{\bar{\cdot}}, a^{\bar{\cdot}\langle \cdot \rangle})$  且大于等于  $(x^{\langle \cdot \cdot \rangle}, x^{\langle \cdot \rangle})$  的概念, 由  $f(x, a)$  的定义可知  $f(x, a) = \emptyset$ , 命题①成立。

2) 类似可以证明命题②也成立。

3) 若  $f(x, \emptyset)$  中的最大元为  $(G, G^{\langle \cdot \rangle})$ , 最小元为  $(x^{\langle \cdot \cdot \rangle}, x^{\langle \cdot \rangle})$ , 则为  $OEFL(\tilde{F})$  中大于等于所有对象诱导的且小于等于  $(G, G^{\langle \cdot \rangle})$  的模糊三支概念。易证  $OEFL(\tilde{F}) = (\bigcup_{x \in G} t(x, \emptyset)) \cup (\varphi, \varphi^{\langle \cdot \rangle})$  命题成立。

4) 类似可以证明命题④也成立, 证毕。

### 3 基于模糊三支概念簇的知识发现

模糊三支概念簇可以用于相似对象的信息检索, 例如新型冠状病毒感染的检测, 可以根据已经患新型冠状病毒感染的病人的特征: 如患者的年龄、发热的温度、呼吸困难等, 对疑似病人进行筛选, 减少相应的工作量。利用模糊三支概念簇可以查找和新冠病人相似, 体温高且没有鼻塞的疑似患者。将上面的情况进行归纳, 假设对象集是  $U$ , 属性集是  $A$ , 即可以在对象集  $U$  中寻找和对象  $x$  相似, 具有  $A$  中的属性  $a$ , 但不具有属性  $b$ 。算法 1 是利用模糊三支概念簇进行相似对象检索的算法。

**算法 1** 在模糊形式背景下, 利用模糊三支概念簇查找相似对象的算法

输入: 模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$ , 对象  $x \in G$ , 属性  $a, b \in M$ , 阈值  $\alpha$ 。

输出: 与已知对象  $x$  相似, 拥有属性  $a$ , 但不拥有属性  $b$  对象的集合。

- ①根据要求确定合适的阈值  $\alpha$ ;

②在给定的模糊形式背景  $\tilde{F}(G, M, \tilde{I})$  下计算对象诱导的模糊三支概念, 建立对应的模糊三支概念格;

③根据给定的属性  $a, b \in M$ , 分别计算模糊三支概念簇  $f(\emptyset, a)$  和  $f(\emptyset, b^-)$ ;

④计算  $f(\emptyset, a) \cap f(\emptyset, b^-)$ , 令  $Z = \text{extent}\{f(\emptyset, a) \cap f(\emptyset, b^-)\}$  从概念  $(x^{\langle \cdot \cdot \rangle}, x^{\langle \cdot \rangle})$  开始, 逐层遍历其父概念: 如果  $X \cap Z \neq \emptyset$ , 那么  $X \cap Z$  中的对象即是符合要求的对象。

**例 2** 新型冠状病毒感染是一种由新型冠状病毒引起的严重急性呼吸系统综合症传染病。此种病毒传染性强, 患者感染后会出现严重的急性呼吸道感染症状, 甚至会出现多脏器功能衰竭, 部分患者会导致死亡, 严重地影响到人们的正常生活。现阶段各个国家正在积极地进行相关研究, 并对疫情爆发后所采取的应对方案进行了深入探讨。表 2 是一个由 10 个疑似病人组成的模糊形式背景, 属性  $a, b, c, d, e, f$  分别表示温度(体温温度)、鼻塞(鼻塞持续时间)、疲劳(疲劳持续时间)、咳嗽(咳嗽次数)、年龄(年龄大小)、头疼(头疼持续时间)。

表 2 有关新冠症状的模糊形式背景

Tab.2 Fuzzy formal context for new coronary symptoms

对象	属性					
	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
1	0.56	0.38	0.62	0.43	0.90	0.83
2	0.76	0.81	0.53	0.66	0.56	0.32
3	0.21	0.65	0.46	0.52	0.82	0.61
4	0.82	0.90	0.45	0.85	0.32	0.78
5	0.85	0.52	0.77	0.62	0.48	0.35
6	0.78	0.36	0.83	0.46	0.73	0.55
7	0.45	0.65	0.72	0.82	0.58	0.36
8	0.62	0.75	0.81	0.63	0.62	0.91
9	0.92	0.55	0.70	0.60	0.42	0.62
10	0.58	0.86	0.36	0.42	0.92	0.62

使用上述算法检索和对象 6 相似, 体温温度  $c$  隶属度大于等于 0.7, 且鼻塞  $b$  的隶属度小于 0.7 的对象。

输入: 有关新冠症状的模糊形式背景, 对象  $6 \in U$ , 属性  $a, b \in A$ , 阈值  $\alpha \geq 0.7$ 。

输出: 和对象 6 相似, 属性  $a$  隶属度大于等于 0.7, 且属性  $b$  的隶属度小于 0.7 的所有对象。

根据要求选取阈值  $\alpha \geq 0.7$ , 计算出有关新冠症状的模糊形式背景的对象导出模糊三支概念如下。

$OE_1 = (12345678910, (\emptyset, \emptyset)), OE_2 = (24569, (\{a, 0.76\}, \emptyset)), OE_3 = (24810, (\{b, 0.75\}, \emptyset)), OE_4 = (56789, (\{c, 0.70\}, \emptyset)), OE_5 = (13610, (\{e, 0.73\}, \emptyset)), OE_6 = (47, (\{d, 0.82\}, \{e, 0.32\})), OE_7 = (24, (\{a, 0.76\}, \{b, 0.81\}, \{c, 0.45\}, \{e, 0.32\})), OE_8 = (148, (\{f, 0.78\}, \emptyset)), OE_9 = (569, (\{a, 0.78\}, \{c, 0.70\}, \{b, 0.36\}, \{d, 0.46\}, \{f, 0.35\})), OE_{10} = (4, (\{a, 0.82\}, \{b, 0.90\}, \{d, 0.85\}, \{f, 0.78\}, \{c, 0.45\}, \{e, 0.32\})), OE_{11} = (6, (\{a, 0.78\}, \{c, 0.83\}, \{e, 0.73\}, \{b, 0.36\}, \{d, 0.46\}, \{f, 0.55\})), OE_{12} = (7, (\{c, 0.72\}, \{d, 0.82\}, \{a, 0.45\}, \{b, 0.65\}, \{e, 0.58\}, \{f, 0.36\})), OE_{13} = (8, (\{b, 0.75\}, \{c, 0.81\}, \{f, 0.91\}, \{a, 0.62\}, \{d, 0.63\}, \{e, 0.62\})), OE_{14} = (10, (\{b, 0.86\}, \{e, 0.92\}, \{a, 0.58\}, \{c, 0.36\}, \{d, 0.42\}, \{f, 0.62\})), OE_{15} = (\emptyset, (abcdef, abcdef)).$

建立有关新冠症状的模糊形式背景的对象导出模糊三支概念格,如图 2 所示。

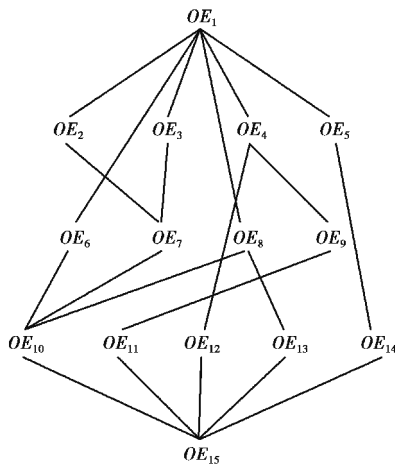


图 2 表 2 的对象导出模糊三支概念格

Fig.2 Table 2 objects induced fuzzy three-way concept lattices

计算模糊三支概念簇  $f(\emptyset, a)$  和  $f(\emptyset, b^-)$  如下。

$$\begin{aligned}
 f(\emptyset, a) = & \{(\emptyset, (abcdef, abcdef)), (4, (\{a, 0.82\}, \{b, 0.90\}, \{d, 0.85\}, \{f, 0.78\}), (\{c, 0.45\}, \{e, 0.32\}))), (6, (\{a, 0.78\}, \{c, 0.83\}, \{e, 0.73\}, \{b, 0.36\}, \{d, 0.46\}, \{f, 0.55\})), (24, (\{a, 0.76\}, \{b, 0.81\}, \{c, 0.45\}, \{e, 0.32\}))), (569, (\{a, 0.78\}, \{c, 0.70\}, \{b, 0.36\}, \{d, 0.46\}, \{f, 0.35\}))\}; \\
 f(\emptyset, b^-) = & \{(\emptyset, (abcdef, abcdef)), (6, (\{a,
 \end{aligned}$$

$0.78\}, \{c, 0.83\}, \{e, 0.73\}), (\{b, 0.36\}, \{d, 0.46\}, \{f, 0.55\})) (7, (\{c, 0.72\}, \{d, 0.82\}), (\{a, 0.45\}, \{b, 0.65\}, \{e, 0.58\}, \{f, 0.36\}))), (569, (\{a, 0.78\}, \{c, 0.70\}), (\{b, 0.36\}, \{d, 0.46\}, \{f, 0.35\})))\}。$

计算  $f(\emptyset, a) \cap f(\emptyset, b^-) = \{(\emptyset, (abcdef, abcdef)), (6, (\{a, 0.78\}, \{c, 0.83\}, \{e, 0.73\}), (\{b, 0.36\}, \{d, 0.46\}, \{f, 0.55\}))), (569, (\{a, 0.78\}, \{c, 0.70\}), (\{b, 0.36\}, \{d, 0.46\}, \{f, 0.35\})))\}。$

记其中全体对象诱导的模糊三支概念的外延为集合  $Z = \{569\}$

从概念  $(x^{(\cdot)}, x^{(\cdot)}) = (6, (\{a, 0.78\}, \{c, 0.83\}, \{e, 0.73\}), (\{b, 0.36\}, \{d, 0.46\}, \{f, 0.55\}))$  开始,逐层遍历其父概念:遍历第一层父概念得到  $(569, (\{a, 0.78\}, \{c, 0.70\}), (\{b, 0.36\}, \{d, 0.46\}, \{f, 0.35\}))$ ,由  $\{569\} \cap \{569\} = \{569\} \neq \emptyset$  可知,对象 5 和 9 符合检索要求。

返回结果对象 5 和 9,即符合条件的对象是 5 和 9,算法结束。

把算法得到的对象 5 和 9 和对象 6 的属性值相比较,可以发现对象 5 和 9 在体温、鼻塞 2 个属性下的值与对象 6 差别很小,与实际的情况相符合,得到的检索结果符合认知。

通过上面的案例可知模糊三支概念簇的特点,模糊三支概念簇是模糊三支概念的集合,该集合里面的模糊三支概念具有一定的相似性。模糊三支概念簇具有模糊三支概念的特性,可以适用于模糊形式背景,对象和属性之间的关系可以是模糊的,在关注对象和属性共同拥有的同时,也考虑了对象和属性共同不具有的情况。因此,模糊三支概念簇的优势是在检索的过程中可以考虑更多的细节,获得更精确的结果。

文献[23]提出的概念簇适用于经典的形式背景,概念簇里的概念强调的是对象共同具有的属性,在模糊形式背景下无法使用,且没有讨论对象共同不具有的属性的情况。文献[24]提出的三支概念簇相比概念簇考虑了对象和属性共同不具有的情况,但是仍然不能应用在模糊形式背景。本文所提出的模糊三支概念簇可以应用于模糊形式背景,应用场景更加贴合实际。

### 4 结束语

本文基于现代范畴理论的思想,把模糊三支概

念分析与其相结合,提出了模糊三支概念簇。模糊三支概念簇可以在特定的条件下检索符合要求的相似对象。与此同时,还有许多问题值得我们去思考,例如,模糊三支概念簇和经典的三支概念簇的区别和联系;模糊三支概念簇是建立在模糊三支概念格的基础之上,如何提升模糊三支概念簇的计算效率也是值得考虑的问题。

### 参考文献:

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts[M]. Berlin: Springer, 1982: 314-339.
- [2] PRISS U. Formal concept analysis in information science [J]. Annual Review of Information Science and Technology, 2006, 40(1): 521-543.
- [3] 张云中,柳迪,张原铭.基于形式概念分析的知识发现研究态势[J].情报科学,2018,36(9): 155-160.  
ZHANG Y Z, LIU D, ZHANG Y M. KDD research situation based on formal concept analysis [J]. Information Science, 2018, 36(9): 155-160.
- [4] 曲开社,翟岩慧,梁吉业等.形式概念分析对粗糙集理论的表示及扩展[J].软件学报,2007,18(9): 2174-2182.  
QU K S, ZHAI Y H, LIANG J Y, et al. Representation and extension of rough set theory by formal concept analysis [J]. Journal of Software Engineering, 2007, 18(9): 2174-2182.
- [5] 张文修,徐伟华.基于粒计算的认知模型[J].工程数学学报,2007,24(6): 957-971.  
ZHANG W X, XU W H. Cognitive model based on granular computing. Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(6): 957-971.
- [6] YAO Y Y. Three-way granular computing, rough sets, and formal concept analysis [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020(116): 106-125.
- [7] YAO Y Y. Three-way decisions and cognitive computing [J]. Cognitive Computation, 2016, 8(4): 543-554.
- [8] 夏月月,张以文.一种融合三支决策理论的改进 K-means 算法[J].小型微型计算机系统,2020,41(4): 724-731.  
XIA Y Y, ZHANG Y W. An improved K-means algorithm based on three-way decision theory [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2020, 41(4): 724-731.
- [9] QI J J, WEI L, YAO Y Y. Three-way formal concept analysis [C]// Proceedings of the 9th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Shanghai, China: Springer, 2014: 732-741.
- [10] QI J J, QIAN T, WEI L. The connections between three-way and classical concept lattices [J]. Knowledge-based systems, 2016(91): 143-151.
- [11] 汪文威,祁建军.三支概念的构建算法 [J].西安电子科技大学学报(自然科学版),2017,44(1): 71-76.  
WANG W W, QI J J. construction algorithm of three-way concepts [J]. Journal of Xidian University (Natural Science Edition), 2017, 44(1): 71-76.
- [12] 史建坤,胡舒淋,智慧来.对象导出三支概念格上的冲突分析[J].小型微型计算机系统,2021,42(11): 2459-2464.  
SHI J K, HU S L, ZHI H L. Conflict analysis via object-induced three-way concept lattice [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2021, 42(11): 2459-2464.
- [13] ZADEH L A. Fuzzy logic and approximate reasoning [J]. Synthese, 1975, 30(3-4): 407-428.
- [14] 龙柄翰,徐伟华.模糊三支概念分析与模糊三支概念格 [J].南京大学学报(自然科学版),2019,55(4): 537-545.  
LONG B H, XU W H. Fuzzy three-way concept analysis and fuzzy three-way concept lattice [J]. Journal of Nanjing University (Natural Science), 2019, 55(4): 537-545.
- [15] 毛华,程艺林,刘晓庆.模糊三支概念与模糊概念格的关系 [J].模糊系统与数学,2020,34(6): 167-174.  
MAO H, CHEN Y L, LIU X Q. The relationship between the fuzzy three-way concept lattice and the fuzzy concept lattice [J]. Fuzzy system and mathematics, 2020, 34(6): 167-174.
- [16] 徐伟华,杨蕾,张晓燕.模糊三支形式概念分析与概念认知学习 [J].西北大学学报(自然科学版),2020,50(4): 516-528.  
XU W H, YANG L, ZHANG X Y. Fuzzy three-way formal concept analysis and concept-cognitive learning [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2020, 50(4): 516-528.
- [17] 毛华,刘晓庆,程艺林.面向对象的模糊三支半概念 [J].华中科技大学学报(自然科学版),2021,49(2): 74-78.  
MAO H, LIU X Q, CHEN Y L. Object-induced fuzzy three-way semi-concept [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2021, 49(2): 74-78.
- [18] CROFT W, CRUSE D A. Cognitive linguistics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 68-90.
- [19] LAKOFF G. Women, fire, and dangerous things: what categories reveal about the mind [M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1987: 35-46.



- [20] 徐淑平,王斌.经典范畴理论与现代范畴理论的对比研究[J].上海理工大学学报(社会科学版),2012,34(4):278-283.  
XU S P, WANG B. A comparative study of classical category theory and modern category theory[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology (Social Sciences Edition), 2012,34(4):278-283.
- [21] 李小飞,范振强.具身哲学视域下的范畴动态构建观[J].山东社会科学,2010(12):111-114.  
LI X F, FAN Z Q. Dynamic construction of categories from a philosophical perspective [J]. Shandong Social Sciences, 2010(12): 111-114.
- [22] 岳好平,黄钰涵.从原型范畴理论探析网络流行语的变异[J].长沙大学学报,2018,32(6):102-104,109.  
YUE H P, HUANG Y H. Analysis of the variation of network buzzwords from the prototype category theory [J]. Journal of Changsha University, 2018,32(6):102-104,109.
- [23] 智慧来,李逸楠.基于概念簇的知识表示 [J].西北大学学报(自然科学版),2020,50(4):529-536.  
ZHI H L, LI Y N. Concept cluster-based knowledge representation [J]. Journal of Northwestern University (Natural Science Edition), 2020,50(4):529-536.
- [24] 智慧来,徐彤,李逸楠.基于三支概念簇的知识表示[J].西南大学学报(自然科学版),2021,43(10):10-18.

ZHI H L, XU T, LI Y N. Knowledge representation based on three-way concept clusters [J]. Journal of the Southwest University, 2021, 43(10): 10-18.

- [25] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis: mathematical foundations [M]. New York: Springer-Verlag, 1999: 284.

#### 作者简介:



徐伟华(1979—),男,山西浑源人,教授,博士,博士生导师,主要研究方向为不确定性人工智能、智能计算、粒计算、数据挖掘、知识发现、机器学习、不确定性处理等。E-mail:chxuwh@swu.edu.cn。



林玉飞(1997—),男,山东临沂人,硕士研究生,主要研究方向为概念认知。E-mail:782892686@qq.com。

(编辑:王敏琦)